

УДК 004.932.2

## РАСПОЗНАВАНИЕ ПРОЕКТИВНО ПРЕОБРАЗОВАННЫХ ПЛОСКИХ ФИГУР. XVII. ПРИВЛЕЧЕНИЕ ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ ПЛЮККЕРА ДЛЯ ОПИСАНИЯ ОВАЛОВ С ВНЕШНЕЙ ФИКСИРОВАННОЙ ТОЧКОЙ

© 2024 г. П. П. Николаев<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> Институт проблем передачи информации им А. А. Харкевича РАН  
127051, Москва, Б. Каретный пер., 19, стр. 1, Россия

<sup>2</sup> ООО “Смарт Энджинс Сервис”  
117312, Москва, просп. 60-летия Октября, 9, Россия

E-mail: nikol@iitp.ru

Поступила в редакцию 29.01.2024 г.

После доработки 26.02.2024 г.

Принята к публикации 14.03.2024 г.

Рассмотрен подход к проективно инвариантному описанию семейства овалов ( $\mathbf{o}$ ) в сценах, где фигура  $\mathbf{o}$  задана в композиции с фиксированной в ее плоскости внешней точкой  $P$ , причем в случаях, когда  $\mathbf{o}$  обладает скрытыми симметриями (центральной либо осевой), позиция  $P$  не задается в виде дополнительного условия, комплекующего сцену, а может быть вычислена через параметры симметрии. Инвариантное описание, как общий универсальный метод численной обработки композиций вида “ $\mathbf{o} + \text{ext-}P$ ”, предлагается реализовать в виде вурф-отображений. Метод привлекает разработанный и описанный нами аппарат дуальных пар (ДП) и вурф-функций, представляющих собой продукт декомпозиции утверждений теоремы взаимности, предложенной Ю. Плюккером для описания свойств квадратичных кривых (коник). Модельные иллюстрированные примеры частных случаев композиции “ $\mathbf{o} + \text{ext-}P$ ” рассмотрены и обсуждены, фактически завершая тему исследования сцен вида “овал и линейный элемент плоскости”, классифицируемых по типам симметрии  $\mathbf{o}$ .

*Ключевые слова:* овал, центр и ось симметрии, плюккеровы полюс и поляра, дуальная пара, гармонический вурф, плоскостной вурф, вурф-функция, дескриптор, кривая Ламе

DOI: 10.31857/S0235009224020059 EDN: DDKZPO

### ВВЕДЕНИЕ

Прежде чем перейти к обсуждению задачи проективно инвариантного описания сцен вида “ $\mathbf{o} + \text{ext-}P$ ”, где  $\mathbf{o}$  — плоская выпуклая фигура семейства овалов, а  $\text{ext-}P$  — неким образом выделенная точка  $P$  во внешней ее окрестности, традиционно уведомим читателя, что данный текст адресован интересующимся вопросами автономного анализа формы и не подразумевает навыков профессиональной подготовки в этой сфере.

Уяснение сути обсуждаемых проблем и понимания модельных итогов работы может обеспечить осведомленность в общих вопросах естественнонаучного плана. Идеи автора донесены в образной геометрической форме. Точное понимание деталей в вводимых далее схемах и приемах численной обработки фигур не требует знакомства с миром образов и логикой обсуждаемых ее методов. Текст насыщен подробными

иллюстрациями (графическими копиями продуктов компьютерного моделирования, полученных для разных сценариев с  $\mathbf{o}$ ), снабженных комментариями, что, возможно, удовлетворит и неспециалистов.

В статье рассмотрены и с привлечением численных моделей обсуждаются новые результаты (сценарии задач, методы и компьютерные схемы их решения) развития темы, отраженной в цикле авторских работ о распознавании овальной фигуры  $\mathbf{o}$  по плоской центральной ее проекции инвариантно к группе *проективных* преобразований плоского контура  $\mathbf{o}$  в 3D-пространстве сцены. Это дробно-линейное преобразование, включающее восемь независимых параметров, фигурирует еще и под именем “преобразование гомографии”.

Предмет нашего исследования — кривые семейства  $\mathbf{o}$  — плоские гладко-замкнутые чисто выпуклые фигуры. Овал общего вида, как объект

геометрии, не предполагает формулы аналитического описания, единой для семейства  $\mathbf{o}$  (аналитический порядок кривой не фиксирован и может вообще отсутствовать), равно как и не имеет опорных элементов контура  $\mathbf{o}$ , традиционно используемых в распознавании фигур по особенностям их геометрии, – наподобие точек излома, перегиба, спрямления, двойного касания и пр.).

Приведенное определение  $\mathbf{o}$ , возможно, объясняет трудности получения устойчивого описания  $\mathbf{o}$ , не зависящего от ракурса оптической регистрации  $\mathbf{o}$  технической системой опознания: исключительно дифференциальные методы анализа, продуцирующие инвариантное описание  $\mathbf{o}$  (эти приемы давно предложены в теории плоских кривых (Картан, 1933)), не пригодны для дискретного входного задания  $\mathbf{o}$  в силу точностных требований при оценке локальных производных высокого порядка у “поточечно” описываемой кривой, каковые абсолютно нереализуемы *практически* (при любых технически возможных характеристиках разрешения камер и сканеров).

По упомянутым причинам для проективно инвариантной репрезентации  $\mathbf{o}$  необходимо получить какие-то дополнительные данные о его структуре. Ресурсно экономные методы анализа и проективно инвариантного опознания  $\mathbf{o}$  возможны в случае задания  $\mathbf{o}$  совместно с *линейным элементом* (точкой либо прямой произвольной ориентации относительно  $\mathbf{o}$  (Николаев, 2011; 2019)) в плоскости  $\mathbf{o}$ . Если же об  $\mathbf{o}$  априори известно, что ему присущи свойства *симметрии*, то таким дополнительным атрибутом его описания могут послужить позиции найденных (с применением предложенных нами переборных либо итерационных численных методов) осей либо центров симметрии  $S$ , а также и “линии горизонта”  $HL$ , имеющей с  $S$  однозначную позиционную связь для  $\mathbf{o}$  неявной *центральной* симметрии разных типов (радиальной, поворотной либо совмещающей аксиальные и центральные ее аспекты, как это присуще кривым Ламе).

Схемы и быстрые алгоритмы поиска элементов симметрии (полного набора ее вариантов) разработаны, численно смоделированы и описаны (Николаев, 2014; 2016), следствием чего стал возможен общий подход к сценам вида “ $\mathbf{o} + \text{int-}P$ ” ( $P$  – внутренняя точка поля фигуры, **теорема 1** (Савчик, Николаев, 2016)), а также композициям “ $\mathbf{o} + \text{ext-}L$ ” (*внешняя* по отношению к  $\mathbf{o}$  прямая  $L$ , **теорема 2** (Балицкий и др., 2017)).

Целью анализа в этой работе станут сцены типа “ $\mathbf{o} + \text{ext-}P$ ”, ранее нами не рассмотренные. Подобная композиция, с оглядкой на полюс-полярные отношения, исследованные Ю. Плюккером на материале коник, в части схем

обработки полностью эквивалентна варианту вида “ $\mathbf{o} + \text{int-}L$ ”. Поскольку отправной точкой изложения (в качестве мотивационного бэкграунда) объявлена связь с теорией Плюккера, показавшего фундаментальным принципом двойственности (именуемым и симметрией обмена) позиционные отношения точки и прямой на плоскости, логичным представляется изложить основные положения этой теории.

Ее привлечение и дало для исследования более сложных, чем эллипс, овальных кривых, инструменты их анализа: *прямолинейные* плюккеровы поляры трансформированы в *криволинейные* (уходящие в *бесконечность* и возвращающиеся из нее)  $H$ - и  $T$ -поляры, в *гармонические контуры*, в состоящие из двух ветвей *дуальные поляры*, а плюккеровы полюса обеспечили преобладание *дуальных пар* и *эллиптических точек* (Николаев, 2011, 2015, 2016). Всецело достаточный для анализа коник проективный инвариант – *линейный* вурф, сообразно возросшим запросам проективной геометрии увеличил размерность, став плоскостным вурфом (Депутатов, 1927; Глаголев, 1963).

## 1. ПОЛЮС-ПОЛЯРНЫЕ ОТНОШЕНИЯ И СЛЕДСТВИЯ ТЕОРЕМЫ ВЗАИМНОСТИ, ПОЛЕЗНЫЕ ДЛЯ СЕМЕЙСТВА ОВАЛОВ $\mathbf{O}$

Любая точка  $P$  плоскости кривой, ей не принадлежащая, по Плюккеру именуется *полюсом*, а всякая *прямая*  $L$ , находящаяся в проективном для полюса соответствии, – *полярной*. Правило соответствия наиболее просто формулируется для  $\text{ext-}P$  и  $\text{int-}L$ : *полюс*  $P$ , внешний по отношению ко всякому эллипсу  $\varepsilon$  (т. е.  $\varepsilon$  любого размера, расположения, ориентации и эксцентриситета), задает для него *полярю*  $L$  как прямую, проходящую через две точки прикосновения на  $\varepsilon$  касательных из  $P$  к  $\varepsilon$  (рис. 1).

Так, на рис. 1 полюсу  $P$  соответствует полярю  $AB$ , полюсу  $D$  – полярю  $LR$ , а для  $T$  ею является прямая через  $MN$ . Здесь и на всех последующих рисунках значки  $\Rightarrow$ ,  $t(n)$  и  $\times$  следует понимать как “является результатом операции”, “касательная в точке  $n$ ” и “касательная в пересечении” соответственно.

На том же рис. 1 уяснить, что такое вурф  $W$ , помогут чертеж и формула в верхней его части. *Модуль* вурфа  $W$  (т. е. абсолютное его значение, не зависящее от знака, который по более полному математическому определению  $W$  может быть и *отрицательным*, что в пределах данного рассмотрения нас интересовать не будет) вычисляется на прямой с выделенной четверкой точек, фиксирующих на ней три отрезка  $a$ ,  $b$  и  $c$  между ними. Длины этой тройки отрезков

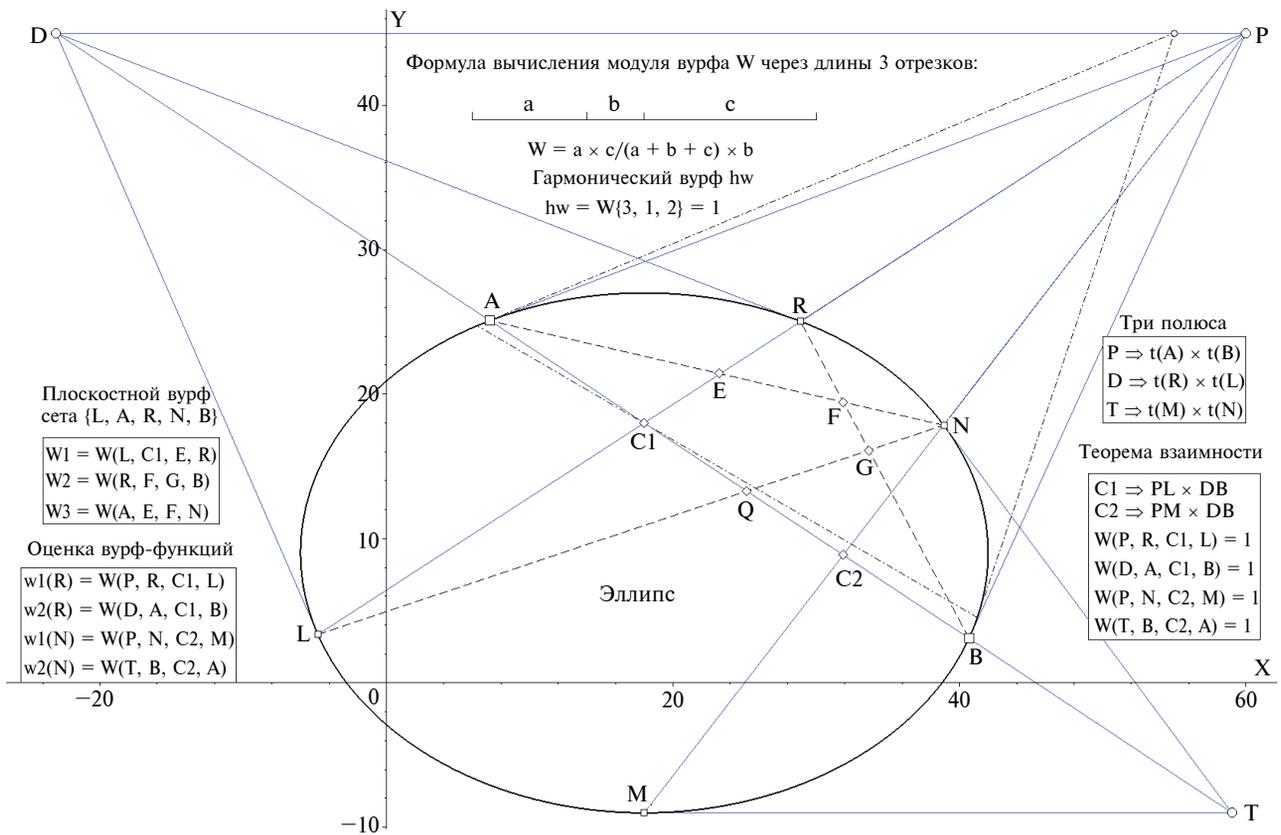


Рис. 1. Полюс-полярные отношения для семейства квадратичных кривых (коник) на примере эллипса, формула вычисления вурфа (через длины трех отрезков) и основные положения теоремы взаимности Ю. Пюккера. Остальные пояснения в тексте.

и привлекаются для оценки W (как числа, не имеющего физической размерности) согласно формуле  $W = ac / b(a + b + c)$ .

Среди множества композиций, задающих численную оценку W, есть особая, для нашего рассмотрения наиважнейшая: это та, что обеспечивает выполнение свойства  $W = 1$ . Именно такой вурф называется гармоническим. Он порождается, например, такой композицией: {a = 2, b = 1, c = 3} (см. чертеж на рис. 1). Но, что адекватно ситуациям для рассматриваемых нами ортоформ o с симметриями, гармонический вурф порождается и композициями вида {x, x, ∞}, т. е. соответствует случаю двух соседних отрезков произвольной конечной и равной длины, тогда как крайний имеет “бесконечную” длину (в математике эту настолько удаленную четвертую точку называют принадлежащей несобственной области).

Заметим, что этот “фантастический прыжок из бесконечности” к изобразимому в конечных координатах o как раз и описывается переходом композиции {x, x, ∞}, например, в {2, 1, 3}, что под силу (утверждение проективной геометрии) преобразованию гомографии.

Этот пример не только дает ясную математическую интерпретацию обстоятельств физической оптики (случай регистрации плоских кривых камерами под разными углами оптической их оси по отношению к плоскости фигур, ограниченных кривыми), но и имеет непосредственное отношение к визуальному миру человека: оптику человеческого глаза довольно точно приближает модель камеры обскуры, задающей зрительный образ в виде плоской центральной проекции. С проекциями такого рода как раз, и имеет дело преобразование гомографии.

Смена оптического ракурса от ортогонального к наклонному задает переход коллинеарных троек отрезков (в выделенной плоской сцене) от композиций вида {x, x, ∞} к {a, b, c} (со всеми тремя конечными длинами, выражающими оценку W), что знакомым нам (по зрительному опыту) образом сопровождается появлением в поле зрения линии горизонта в полном соответствии с законами линейной перспективы.

Накоплен инструментарий и дан список терминов, необходимый для внятного (не требующего гипотез интерпретации и математической спецподготовки) перехода к двум декларациям

теоремы взаимности, которые мы вычленим из нее (для успешной работы с семейством  $\mathbf{o}$ ), используя их уже независимым образом. Ими объявляются проективно инвариантные свойства касательных (назовем их *тангенциальными*, они эксплицируют свойства предложенных нами Т-поляря) и свойства *вурфов*, как координатных оценок для прямых в сцене, измерительными эталонами которой по проективным законам уже не могут быть *углы*, *длины*, свойства *параллельности* (как инварианты аффинной геометрии), применимые в привычной геометрии Декарта. Эти свойства (а именно *гармонические*) определяют проективную инвариантность введенных и успешно используемых Н-поляря.

Обратимся к рис. 1. Теорема гласит: “Для произвольного полюса Р на его поляре АВ можно задать в произвольной позиции некий второй полюс (для определенности на рисунке выбраны позиции D и T по разные стороны от отрезка поляры АВ) и его поляра (в нашем примере это поляры LR и MN) пройдет через Р”.

Так как в описании сцены к первой поляре добавилась вторая (это LR либо MN), в итоге ее графика включает две коллинеарных четверки точек, поскольку появилась позиция их пересечения (у нас это C1 либо C2 с образованием квартетов {P, R, C1, L} и {D, A, C1, B}, либо пары {P, N, C2, M} и {T, B, C2, A}).

Теперь можно сформулировать второй тезис теоремы: “Два появившихся коллинеарных квартета имеют неизменную особенность: они *гармонические*”. Формально это утверждение можно выразить через оценки:  $W(P, R, C1, L) = 1$  и  $W(D, A, C1, B) = 1$  (что в альтернативном варианте выглядит как  $W(P, N, C2, M) = 1$  и  $W(T, B, C2, A) = 1$ ). На рис. 1 эти соотношения приведены на врезках с правой стороны.

Напомним, что согласно **теореме 2** об инвариантных свойствах прямой ext-L, внешней относительно  $\mathbf{o}$  (Балицкий и др., 2017) на ext-L имеется не менее двух пар точек (в цикле наших работ именуемых дуальными парами, ДП), где каждая ДП в терминах Плюккерова полюс-полярного соответствия дуально симметрична по неким полюсам, инцидентным ext-L. На рис. 1 этот факт отражен в простейшей его реализации (не для  $\mathbf{o}$ , а применительно к свойствам  $\mathbf{\varepsilon}$ ): парами вида ДП являются Р..D либо Т..Р, а их ext-L – это PD (либо PT).

Каждая ДП детерминирует на контуре  $\mathbf{o}$  (у нас это кривая  $\mathbf{\varepsilon}$ ) свой квартет проективно инвариантных вершин: здесь ими являются {A, R, B, L} либо {A, N, B, M}. **Теорема 2** гарантирует наличие на ext-L для  $\mathbf{o}$  общего вида не менее двух ДП, что на его контуре фиксирует октет стабильных

вершин, эффективно используемых для проективно инвариантного описания  $\mathbf{o}$  (Николаев, 2017; 2022).

Для излагаемого здесь подхода ситуация зеркально симметрична: стартовым условием является наличие в сцене не прямой ext-L, а плюккерова полюса ext-P, который для  $\mathbf{o}$  детерминирует свою (плюккерову) поляру, и ее свойства можно привлечь для реализации инвариантных репрезентаций в новой постановке.

О проективно стабильных свойствах композиции “ $\mathbf{o} + \text{ext-P}$ ” теорем (аналогов **теоремы 2**) пока нет. Но на все еще не исчерпывающим образом изученные свойства ДП с новой точки зрения позволяет взглянуть тот же рис. 1.

Заявленная цель – предложить итоговое описание  $\mathbf{o}$  в виде 2D вурф-отображения – с неизбежностью подводит к необходимости рассмотрения перспектив получения не менее двух независимых вурф-функций, вычисляемых по всем вершинам входной дискретной аппроксимации  $\mathbf{o}$  для некой общей точки ext-P. Обобщенная инверсия свойств, нами заложенных в структурную организацию Н-поляря (“обобщение” состоит в игнорировании свойств гармонизма для лучей сканирования контура извне при неизменности вычисления вурф-оценок для них) дает метод получения первой W-функции. Назовем ее *радиальной*.

Поскольку для полюса Р (см. рис. 1) поляра АВ также однозначно фиксирована, для каждого сканирующего из Р луча в угловом диапазоне от А до В повсеместно в наличии квартет точек (при пробеге через R это {P, R, C1, L}, тогда как для N это {P, N, C2, M}).

Тангенциальные свойства, заложенные в структуру Т-поляря, при ее декомпозиции наталкивают на возможность получения двух W-функций, которым присвоим характер *тангенциальных*. Для коник это будет только одна функция, состоящая в вычислении W уже не на луче из Р, а на его поляре АВ (по обе стороны отрезка АВ) – по тройке {A, C1, B}, к которой добавляется тангенциальная текущая (для пробегаемой R это D, а в N ею станет T). Только для  $\mathbf{\varepsilon}$  ближняя и дальняя (от Р) касательные пересекаются в общей точке.

Набранная нами (на компьютерных моделях) обширная статистика показала, что пересечение касательных по обе стороны от поляры в общей точке на ней – событие уникальное, что дает запас универсальности (ведь для формирования W-отображения необходимы лишь две W-функции) для случаев специального вида симметрии  $\mathbf{o}$  и позиционных свойств детерминируемой

ею позиции  $P$ , когда радиальная функция может оказаться “константно гармонической” (в разд. 6 мы покажем как и при каких условиях такое “обеднение”  $W$ -функций возможно).

Упомянем вкратце о фундаментальной разнице свойств, согласно теореме взаимности имеющих у  $\varepsilon$ , и “необратимо теряемых” в сценах с  $\mathbf{o}$ . Вращение полярны  $AB$  вокруг  $C1$  порождает (за исключением *единственного* случая из бесконечного набора допустимых) целиком *криволинейную* траекторию точек пересечения касательных для концевых  $A$  и  $B$ , что и соответствует заданию  $T$ -поляры, тогда как (в итоге того же вращения хорды  $AB$ ) для  $\varepsilon$  траекторией всегда будет *прямая* – внешняя полярна  $DP$  для внутреннего полюса  $C1$ .

Та же потеря коллинеарности траектории при вращении хорды у  $\mathbf{o}$  (в сравнении с обязательной коллинеарностью для  $\varepsilon$ ) происходит при формировании  $H$ -поляры, вычисляемой по правилу добавления концевой четвертой точки  $D$  (к триаде наличных  $\{A, C1, B\}$ ) согласно требуемому (для каждой позиции дискретного вращения хорды) свойству *гармоничности* построенного квартета  $W(D, A, C1, B) = 1$  (см. рис. 1).

Этот фрагментарный комментарий очертил “проективно инвариантную эффективность” введенных инструментов анализа – криволинейных (и проективно замкнутых) поляр типа  $T$  и  $H$  как конструктов декомпозиции теоремы взаимности, пригодных для анализа кривых семейства  $\mathbf{o}$ . Именно о них доказана **теорема 1**: “Для произвольного внутреннего полюса  $P$  детерминируемые им  $T$ - и  $H$ -поляра пересекаются не менее чем в трех точках”, названных *эллиптическими* и за редким исключением (известной природы) являющихся коллинеарной триадой (Савчик, Николаев, 2016).

Рисунок 1 дал также наглядный пример того, что понятие ДП для интересующего нас случая постановки задачи ( $\text{ext-}P$ ) целесообразно трактовать расширительно – полезно не пренебрегать свойством, по теореме взаимности *обязательным* для  $\varepsilon$  и при обширном дата-сете модельных примеров выполняющимся для  $\mathbf{o}$ : если для полюса  $P$  у  $\varepsilon$  возможно указать (неограниченное) множество ДП по обе стороны от хорды  $AB$  (на рис. 1 фиксированы  $D$  и  $T$  *произвольного* расположения на полярне  $AB$ ), то для  $\mathbf{o}$  целесообразно искать (с целью полноты описания) для  $\text{ext-}P$  его ДП также по обе стороны от хорды  $AB$ , задающей его плюккерову полярне, что будет показано на модельном примере в следующем разделе данной работы.

Таким образом, ДП, являющиеся для  $\text{ext-}L$  действительно *парами* (что декларирует **теорема 2**), в случае  $\text{ext-}P$ , задающего свою

хорду = полярне, могут стать конструкцией вида *триады*, когда для “входной”  $\text{ext-}P$  окажется возможным найти свою ДП по одну и другую сторону хорды  $AB$ .

На левой врезке рис. 1 имеется дополнительный структурный комментарий к правилам вычисления *плоскостного вурфа* (он нужен для вычисления иной, нежели  $W$ -отображение, формы проективного представления  $\mathbf{o}$ , в виде названного нами *дескриптором* замкнутого циклического графа с числом вершин  $\geq 5$ ), что оставляется без разъяснений текстом – как повод для самостоятельного изучения любознательным читателем (для чего все необходимые предпосылки уже созданы на этой стадии описания базовых понятий и дефиниций, а роль дескрипторов заявленного вида рассмотрена с достаточной полнотой в предшествующих статьях цикла).

Добавим: тема – “как полюс-полярный дуализм коник и теорема взаимности помогают понять идеи и методы проективного анализа  $\mathbf{o}$ ” – доходчиво рассмотрена в статье (Акимова и др., 2014).

## 2. ОБЩИЙ ВЗГЛЯД НА ПОСТАНОВКУ ЗАДАЧИ И МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ $\mathbf{o}$ ОБЩЕГО ВИДА

В границах данного раздела забудем о проблемах обработки  $\mathbf{o}$  и задаче их описания инвариантно к преобразованию гомографии для той их “занимательной” разновидности, что предполагает шанс привлечения свойств *симметрии*, скрытых в их геометрии. Эта постановка делает безвариантным генезис композиции “ $\mathbf{o} + \text{ext-}P$ ”: внешний полюс введен в сцену без априорного привлечения каких-либо зависимостей от геометрии  $\mathbf{o}$  для задания его локализации относительно  $\mathbf{o}$ . Так что предстоящий анализ разумно связывать исключительно с моделированием схем вычисления пары  $W$ -функций независимой природы и поиском ДП нового формата (которые было бы адекватнее именовать *дуальными триадами*), чтобы прояснить с их применением связанные возможности реализации описания  $\mathbf{o}$  в двух других формах: в виде графов дескриптора и в форме эталонного перепроецирования – восьмивершинного эталона “квадрат+ромб” (Николаев, 2022).

Реализация вычисления радиальной и тангенциальных  $W$ -функций не встретила проблем ни в одной из опробованных моделей  $\mathbf{o}$  общего вида при произвольных сменах положения  $\text{ext-}P$  (относительно фиксированного  $\mathbf{o}$ ). Десятки проб успешно завершились формированием  $W$ -отображений (менялась лишь их форма,

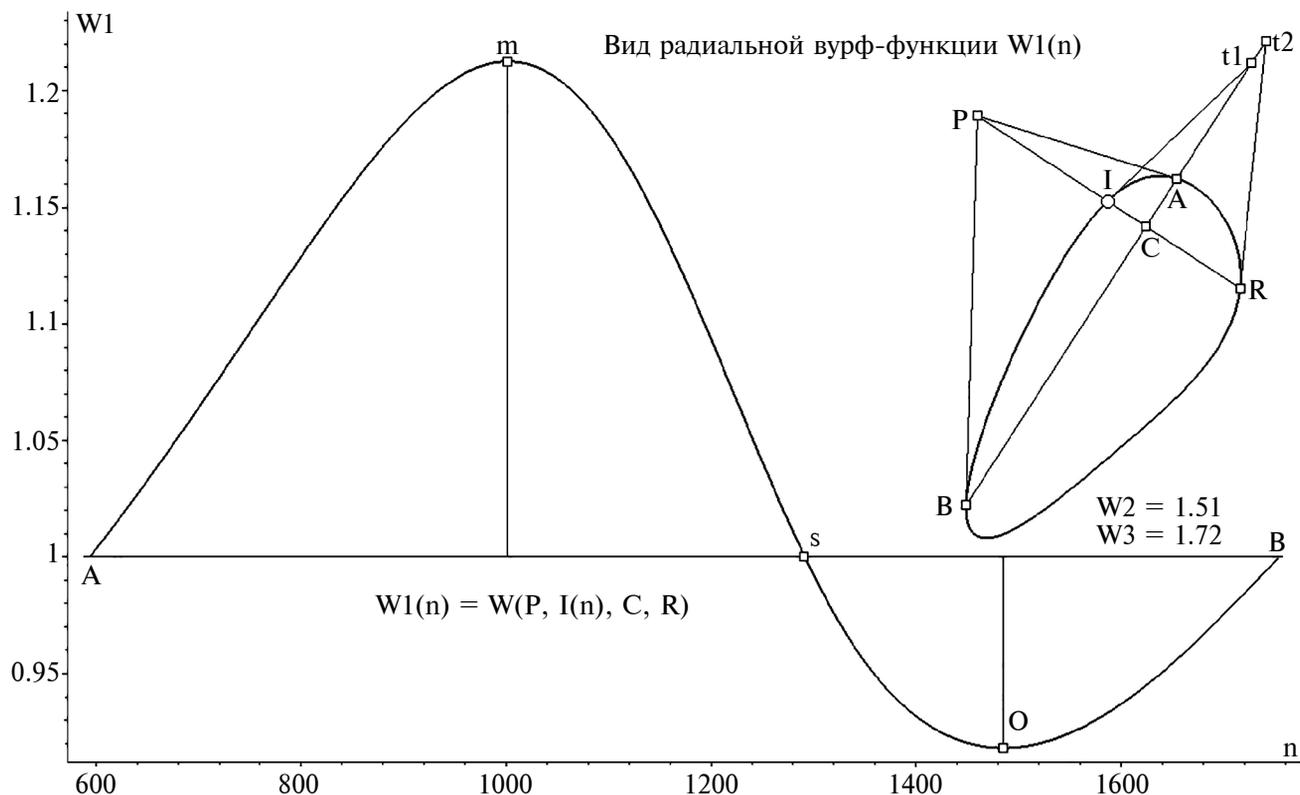


Рис. 2. Метод вычисления *радиальной* вурф-функции и типовой (двухфазный) ее вид на модельном численном примере *о* общего вида. Остальные пояснения в тексте.

что только на пользу для теста “распознавание в классе проективной эквивалентности *о*”).

На рисунках 2–4 показаны типовые примеры триад графиков *W*-функций и формы карт *W*-отображений, получаемых их парным сочетанием (для формирования 2D *W*-карты).

Типовой вид двухфазной радиальной *W*-функции демонстрирует рис. 2. На врезке схема вычисления всех трех ее форм, показывающая:  $W2(n)$  и  $W3(n)$  не обязаны быть тождественно неотличимыми, как это у *э* “предписано” теоремой взаимности). В других симуляциях (не включены для показа) *W*-функции имели как однофазную, так и (редко) трехфазную форму.

Вид *о* (из сети тестовых вариантов компьютерной реализации) был выбран в качестве носителя наибольшего числа особенностей, одна из которых – резкое отличие величины экстремумов у  $W2(n)$  и  $W3(n)$ , что делало “сильно сплюсненным” отображение  $W2(W3)$ .

Для нивелировки этого свойства была предложена и протестирована операция сглаживания функции  $W3(n)$  извлечением квадратного корня для значений ее ординат (что корректно для инвариантности итоговой репрезентации по причинам

отсутствия у вурфа какой-либо физической размерности), что и показано на рис. 3.

Рисунок 4 демонстрирует вид отображений  $W2(W1)$  и  $w3(W1)$ , где  $w3(n) = \sqrt{W3(n)}$ , причем на врезке изображена именно та позиция *i* (это текущий номер вершины аппроксимации *о*) лучом *P-R(i)* из полюса *P*, где выполняется условие  $W2(i) = W3(i)$ , что является обязательным свойством *э*.

Перейдем теперь к изложению тех аспектов моделирования, которые затрагивают для ДП эволюцию от пар к триадам.

Для накопления репрезентативной статистики в задаче поиска позиций ДП было необходимо разработать три быстрых алгоритма оценки их дислокации. Первый – для работы в сценах, где ext-*P* изолирован, не принадлежа какой-либо из ext-*L*, как это присуще обширному списку вариантов сцен для *о* со скрытыми симметриями (разд. 4), там в роли ext-*L* фигурирует линия горизонта *HL*. Второй и третий – именно при условии принадлежности к *HL* полюса *P*.

Когда на *HL* лишь две ДП, эти четыре позиции без труда можно было найти подбором вручную, но для получения репрезентативной статистики



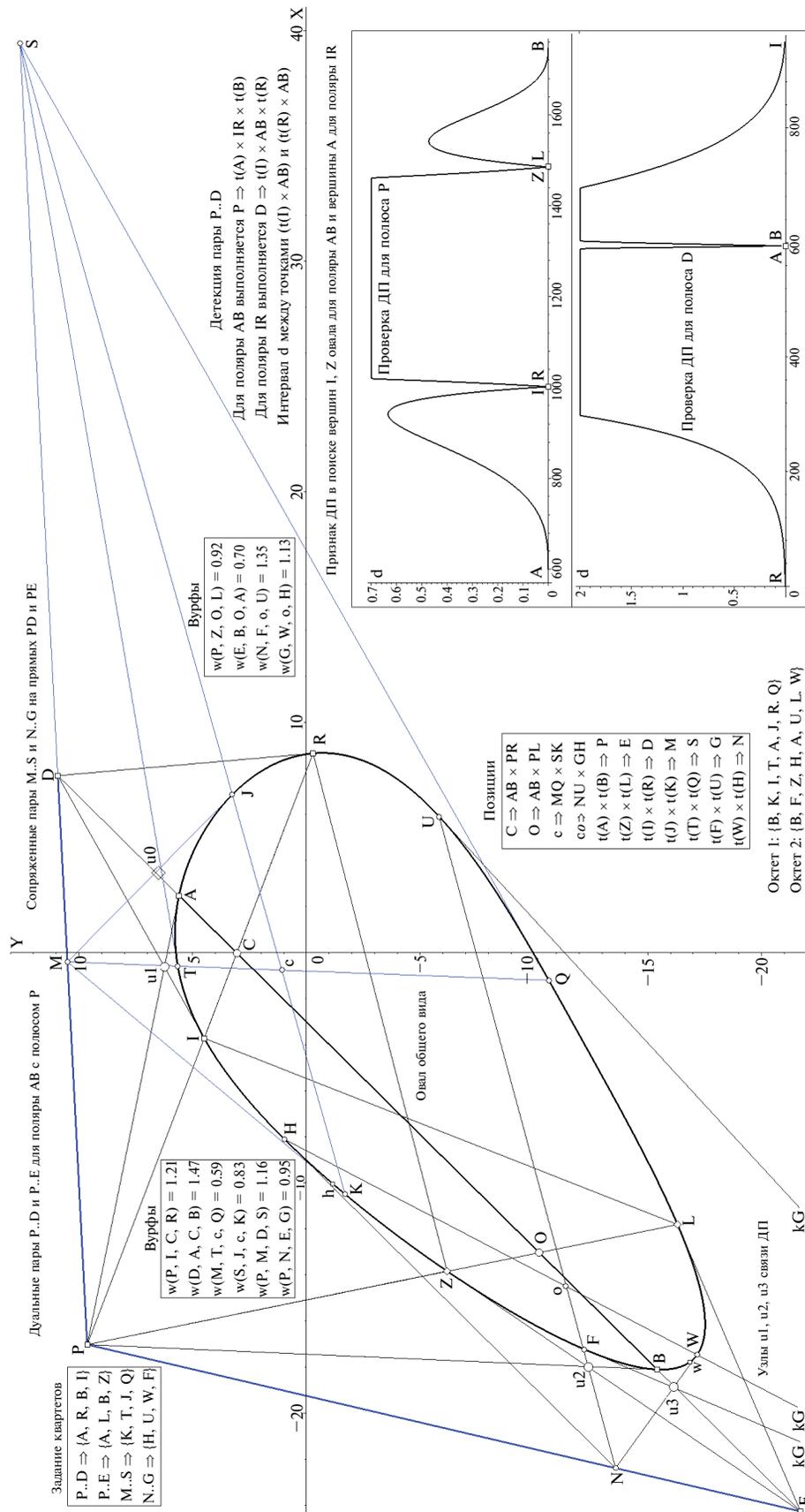
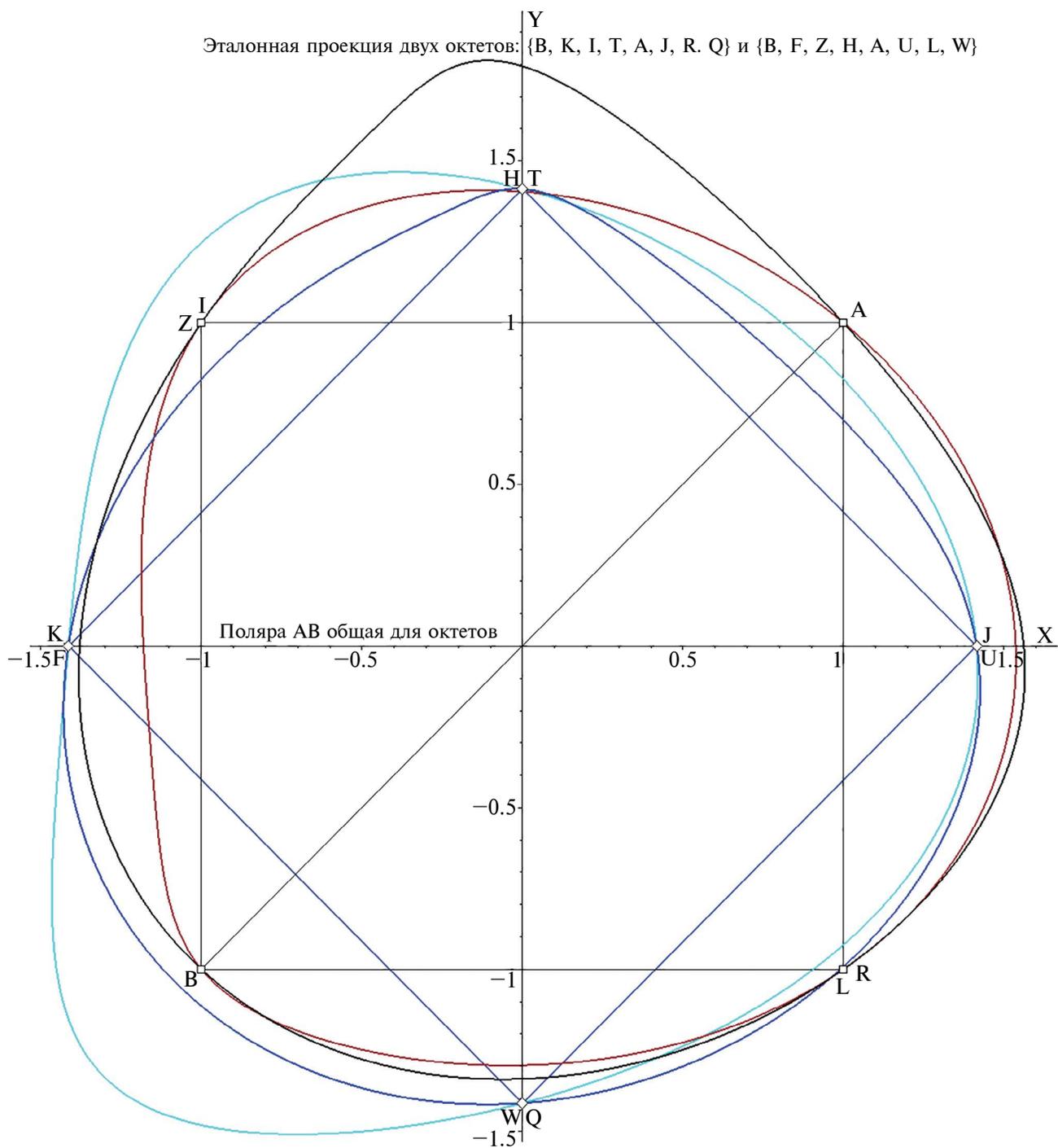


Рис. 5. Постановка задачи для сцен вида "o + ext-P", иллюстрирующая возможность получения триад ДП (в согласии с теоремой взаимности), вид гистограмм поиска ДП для полюсов P и D (на врезке справа) и использование триад P..D, P..E для вычисления дополнительных ДП M..S (синий цвет) и N..G на прямых PD и PE. Пояснения в тексте.



**Рис. 6.** Вид объединенной эталонной проекции двух найденных октетов ( $\{B, K, I, T, A, J, R, Q\}$  и  $\{B, F, Z, H, A, U, L, W\}$ ) на контуре  $\sigma$  общего вида, задающей проективно стабильное описание  $\sigma$  с учетом позиций 14 вершин его контура в сцене с полюсом  $P$  и плюккеровой полярной  $AB$  (два квартета спроецированы на квадрат, два – на ромб, диагональ полярны – общая для черной и коричневой проекций). Остальные пояснения в тексте.

на большом массиве модельных тестов процедуру поиска следовало сделать автоматической (а еще и быстрой, и точной). А когда таких ДП много (как, например, для овала типа  $R_3$  с симметриями, что описано в разд. 6, 7), необходимо автоматизировать и кластеризацию полученных четвертов номеров для контура  $\mathbf{o}$ , представляющих каждую ДП на  $HL$ .

Уже на этапе исследования  $\mathbf{o}$  общего вида все требуемые процедуры были разработаны и программно реализованы, что сильно ускорило и облегчило анализ запланированных видов  $\mathbf{o}$  со скрытыми симметриями. Каков же метод поиска ДП для сцен вида ext- $P$ ? Ответ прост: надо автоматизировать цепь проверок для касательных, следующей свойству симметрии внешних полюсов и их поляр на  $\mathbf{o}$  — для воспроизведения соотношений, декларируемых теоремой взаимности (см. разд. 1).

Воспользуемся литерной разметкой точек на рис. 5, чтобы проиллюстрировать идею поиска ДП по калькам теоремы взаимности. Итогом автоматического анализа поведения касательных на  $\mathbf{o}$  оказалась фиксация двух ДП для  $P$  по разные стороны от поляры  $AB$  (в позициях  $D$  и  $E$ ), что и образовало триаду  $P..D$  и  $P..E$ . На примере луча  $P-I-R$  (давшего сигнал о наличии дуальной позиции  $D$ ) проследим ход проверок для касательных, что привел именно к такому позиционному выводу.

Цепь вычислений выстроилась из таких шагов:

а) касательная в  $I$  задает точку  $D$  пересечения с полярой  $AB$ ;

б) проверяемый полюс  $D$  детерминирует для  $\mathbf{o}$  точку касания  $R$  (в итоге получена гипотеза о поляре  $IR$ );

в) наконец, прямая  $IR$  проверяется на близость прохождения от полюса  $P$ . Эта оценка близости  $d$ , как функция номера  $n$  вершины аппроксимации  $\mathbf{o}$ , приведена на верхней (справа) врезке рис. 5. Под нею — результат проверки полученной позиционной гипотезы.

Теперь исходным внешним полюсом объявлена точка  $D$  для той же программы проверки (ее поляра — это хорда  $IR$ ). Поиск дает позицию  $P$ , как удовлетворяющую единственным образом закону существования ДП. Итог исчерпывает разнообразие произведенных проверок:  $P$  образует триаду (его дуальные связи по обе стороны от  $AB$ ), тогда как полюс  $D$  связывается в классическую ДП:  $D..P$  (по правую сторону от  $IR$  у него нет “дуального собрата”).

Осталось отметить, что для  $E$  (как второго партнера  $P$  в триаде) также не нашлось претендента

на комплектацию триады: вниз от хорды  $ZL$  нет полюса, дуального  $E$ . Какую не обсужденную еще информацию содержит рис. 5? Ответ таков: показан возможный дальнейший путь анализа  $\mathbf{o}$ , дающий новые его описания.

Цепь итеративного наращивания проективно инвариантных характеристик  $\mathbf{o}$  не имеет конца (фактический конец определяется скоростью нарастания координатного шума, влияние которого нами не моделируется, а потому и не обсуждается).

Рассмотрим следующую “волну” возможных оценок, связанную с тем, что два новых полюса  $D$  и  $E$  создали возможность применения теоремы 2, детерминировав для  $P$  позиции двух ext- $L$ :  $PD$  и  $PE$ .

Ставший стандартным поиск ДП на ext- $L$ , дал четыре новых точки: на  $PD$  найдена ДП  $M..S$ , на  $PE$  локализована  $N..G$ . Получившаяся картина с пятью внешними полюсами дает материал для локализации на контуре  $\mathbf{o}$  14 стабильных позиций ( $4 \times 4 - 2$ ). Этот ансамбль можно использовать двояко: либо сформировать замкнутую ломаную дескриптора в виде графа с 14 вершинами (ничуть не хуже — вычислить два восьмивершинных графа для каждого октета), либо построить два восьмиточечных проекционных эталона для сетов  $\{B, K, I, T, A, J, R, Q\}$  и  $\{B, F, Z, H, A, U, L, F\}$  (рис. 6).

Осталось прокомментировать наличие на рис. 5 четырех меток вида ромб:  $u_1, u_2, u_3$  и более крупную  $u_0$ . Они демонстрируют (не в первый раз, поскольку таким образом накапливается база примеров выполнения в эмуляциях сцен стабильно приближительного свойства) эвристическую особенность: наличие тройных точек пересечения для двух ДП на ext- $L$ , в качестве которой может фигурировать и  $HL$  (всегда — это пара касательных из разноименных ДП и прямая поляры, ведущая в альтернативный полюс).

Подобные свойства не стали предметом теорем, выполняются в подавляющем большинстве случаев с визуально наблюдаемыми погрешностями, потому и названы *эвристиками*. Эти регулярно воспроизводимые особенности очень хотелось бы каким-либо образом причинно истолковать, однако пока нет даже идеи подхода к такой задаче.

Погрешности выполнения тройного пересечения можно объяснять гипотезой об ошибках вычисления касательных, поведение которых в авторских численных схемах задается по правилам дискретного приближения дифференциальных свойств *коник*. Например, в точке  $Q$  (см. рис. 5)

ориентация касательной определяется с ошибкой, поэтому зона  $u0$  велика.

Описанием этой эвристической особенности завершим рассмотрение методов репрезентации овальных фигур  $o$  *общего вида*, переходя к анализу композиций “ $o + ext-P$ ”, где объектом исследования избраны кривые со скрытыми свойствами *симметрии*: это центральные проекции кривых Ламе с их “аналитически исходными на ортоформах” двумя осями симметрии и центром; осесимметричные и радиально симметричные  $o$ , а также овалы типа  $R_3$  (подсемейство  $o$  “ротационной симметрии индекса 3”).

Каждому из перечисленных типов  $o$  посвящается свой раздел, только теперь результаты решения поставленной задачи докладываются в двух версиях.

1. В стандартной постановке, когда позиция  $ext-P$  задается случайным выбором (рандомно), никак не эксплицируя свойств симметрии.

2. В виде эстафетной процедуры, для которой ранее разработанные приемы анализа  $o$  (их мы не будем описывать) становятся поставщиком данных предварительной обработки, видоизменяя постановку задачи до описания лишь завершающей фазы, — с уже найденными (либо однозначно избранными из наличного набора возможных) позициями  $ext-P$ , каковыми могут оказаться и позиции на  $HL$ , и уникальные координаты плюккерова полюса симметрии (для осесимметричных  $o$ ).

Начнем с чисто выпуклых кривых Ламе, как наиболее близкому к  $\varepsilon$  *нелинейному* его аналогу.

### 3. ПРОЕКЦИИ СУПЕРЭЛЛИПСОВ КАК ВЫПУКЛЫХ ОРТОФОРМ КРИВЫХ ЛАМЕ

Начиная изложение, следует уточнить терминологию. Кривая Ламе, в виде некоего нелинейного обобщения  $\varepsilon$ , была предложена и исследована Габриэлем Ламе в середине XIX в.; имеет аналитическое описание вида  $|x/a|^n + |y/b|^n = 1$ , где  $a$  и  $b$  по примеру  $\varepsilon$  именовуют *полуосями*, а  $n$  в диапазоне изменений от 0 до  $\infty$  лишь при значениях  $\geq 2$  является чисто выпуклой фигурой, при стремлении к  $\infty$  становясь все более похожей на прямоугольник со сглаженными углами.

В общем виде этот трехпараметрический комплекс не является *алгебраической* кривой (эта принадлежность ограничивается условием: лишь при  $n = p/q$  — в виде ненулевого рационального числа, с индексом аналитического порядка  $pq$  для положительных  $n$  и  $2pq$  — для отрицательных значений).

При  $n = 2$  это “наш”  $\varepsilon$  в каноническом представлении, а при  $n < 2$  кривая обретает вогнутости и сингулярности (в виде *острия*), фиксируя частные разновидности (астроида, ромб, крест, гипоциклоида, свиркл, кривая Ферма и иные ранее устоявшиеся названия, — уже вне принадлежности к  $o$  (Савелов, 1960; Gardner, 1977)).

Кривая была названа П. Хейном *суперэллипсом* (не будучи математиком, он не знал, что имя у кривой уже есть). Именно это, приведенное выше аналитическое выражение, корректно именовать кривой Ламе (или суперэллипсом).

В наших модельных экспериментах такой вид представления кривой мы предпочитаем называть ее *ортоформой*, как наипростейшей разновидностью описания, где свойства симметрии даны *явно*: оси симметрии взаимно перпендикулярны, деля параллельные хорды пополам, и пр. В *школьной геометрии* формулируемые особенности визуально очевидны, явны. В *проективной геометрии* подобного рода определения теряют смысл и применимость, там допустима лишь опора на проективно инвариантные “корни” измерительных понятий: это все те же вурфы и поведение касательных.

Модельные эксперименты проводятся с ортоформой, под воздействием преобразования гомографии явные признаки симметрии кривой становятся уже *неявными* (визуально скрытыми). Проективно преобразованную кривую суперэллипса некорректно называть кривой Ламе — теперь это ее *проективный образ*.

С учетом разъяснения для категорий “явная” и “скрытая” в дальнейших описаниях для их краткости нами допускается вольность: под суперэллипсом (и кривой Ламе) подразумевается *проективный образ* таковых (синоним — мир *проекций* оных, где уже нет измеряемых углов и длин).

“Сервисный” рис. 7 показывает результаты работы компьютерной программы, предназначенной для поиска на проекции суперэллипса тех его вершин, в которых касательные удовлетворяют закономерностям выбора на линии горизонта  $HL$  (ее положение считается найденным на предварительном этапе обработки контура) четырех проективно инвариантных позиций, соответствующих двум ДП. Этот набор из восьми особых вершин  $o$  найден и расклассифицирован программой на два квартета (коричневый и синий цвет объединений в два кластера), каждый из которых соответствует своей ДП. В итоге на  $HL$  теперь фиксированы пары  $D..P$  и  $G..N$ .

Обратимся к рис. 8. Справа внизу изображена кривая Ламе, как она графически выглядит согласно аналитической формуле (т. е. это

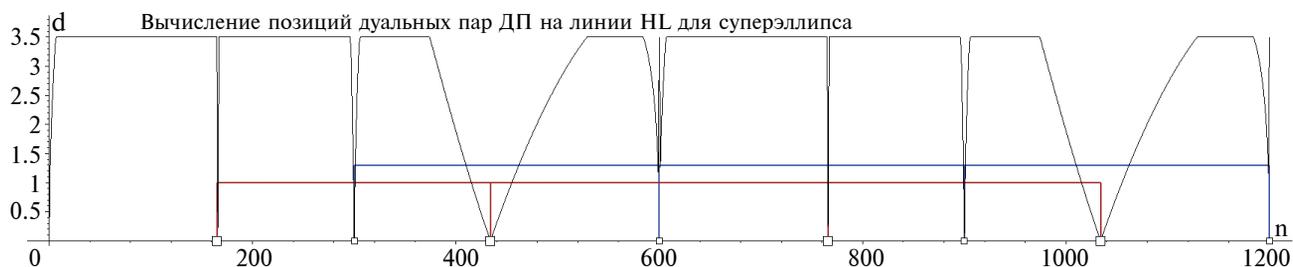


Рис. 7. Вид гистограммы поиска позиций ДП на HL по итогам работы программы, ведущей в последовательном переборе вершин аппроксимации на проекции суперэллипса отбор удовлетворяющих критерию “дуализма Плюккера”. Пояснения в тексте.

ее ортоформа). Показаны две ее оси симметрии, на их пересечении центр  $O$ . Поле рисунка занимает модельная проекция кривой с таким набором коэффициентов преобразования гомографии, что линия горизонта HL (синяя прямая от  $D$  до  $N$ ) уже не в *несобственной* области (у ортоформы она удалена в бесконечность), а вблизи фигуры.

Посредством применения методов, предложенных и оптимизированных нами ранее, будем полагать найденным положение HL. Ее позицию можно локализовать несколькими независимыми методами: переборными алгоритмами поиска центра  $O$  с последующим вычислением координат HL либо через позиционную оценку неявных осей симметрии, плюккерovy полюса которых детерминируют HL.

Связь с осями тут такова: пара плюккерovy полюсов каждой оси образует ДП на HL. На рис. 8 это соответствует такой идентификации метками и литерами: неявные оси на проекции размечены как AB и JS, в качестве плюккерovy поляр они задают на HL полюсы G и N, являющиеся одной из двух ДП (эта композиция выполнена коричневыми отрезками).

Во врезках слева предьявлены гармонические свойства квартетов стабильных вершин, а также (ниже) структурные правила, которым подчиняется набор касательных, задающих на HL положение вершин D, G, P, N (и дополнительных полюсов Z и V).

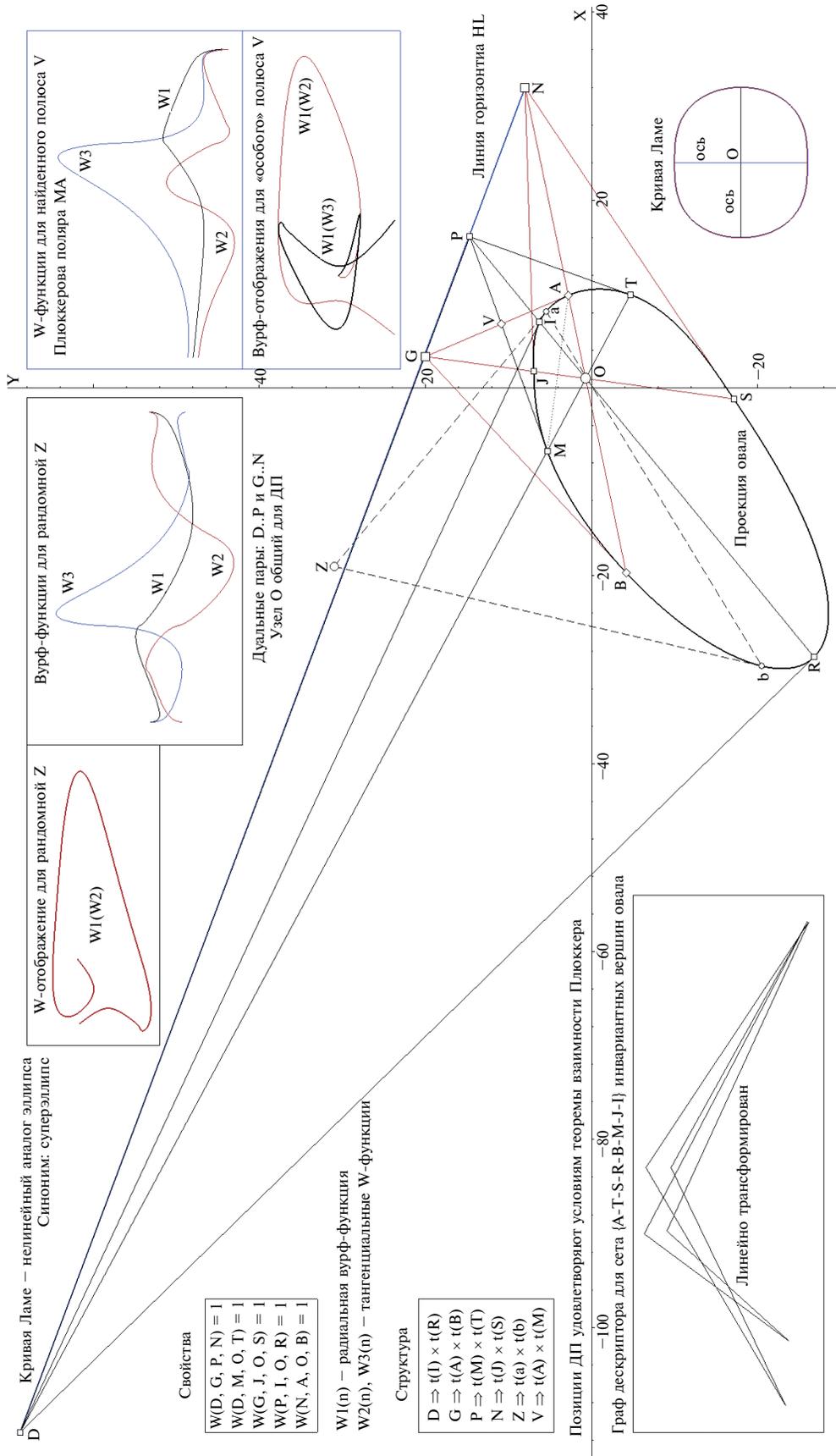
Вторая ДП на HL (черный цвет) порождена двумя диагональными хордами IR и MT в их качестве поляр Плюккера. Две найденные (для HL) ДП на контуре  $\sigma$  фиксируют инвариантный октет вершин  $\{A, T, S, R, B, M, J, I\}$ , каковой можно использовать для построения восьмивершинного графа дескриптора, линейно трансформированный вид которого показан на врезке рис. 8.

На роль *уникальной* (и однозначно выбираемой) ext-P можно было бы выбрать позицию полюса P, так как он расположен между полюсами G и N, принадлежащими осевой ДП (сам он – из диагональной ДП). Но для иллюстрации на роль стартового ext-P (для большей общности) выбрана позиция однозначного задания, не принадлежащая HL.

Положение стартовой точки V задается правилом  $V \Rightarrow t(A) \times t(M)$ . Как и ожидалось, вычисление для V (то же самое продемонстрировал в качестве стартового и полюс P) его тангенциальных вурф-функций не дало результата их совпадения. Они были различной формы, а радиальная W-функция не представляла собой точно горизонтального плато уровня 1 (как это понятным образом происходит у осесимметричных  $\sigma$ , если стартовой точкой ext-P избран плюккерovy полюс оси симметрии, “на ролях” его поляр, см. разд. 4). В правой части рис. 8 на врезках показаны: вид тройки вурф-функций  $W1(n)$ ,  $W2(n)$  и  $W3(n)$  (черный, коричневый и синий цвета кривых), а ниже – вид двух W-отображений  $W1(W2)$  и  $W1(W3)$  (коричневый и черный цвета соответственно), вычисленные для позиции V, представляющей стартовую ext-P.

Левее на двух врезках выведены итоги модельных симуляций в обработке той же самой проекции суперэллипса теперь уже для положения стартового полюса, позиция которого не является “вычислимым следствием свойств симметрии  $\sigma$ ”, а задана произвольным выбором (рандомно).

Аналогичным (для V) образом продемонстрирован вид трех кривых  $W1(n)$ ,  $W2(n)$  и  $W3(n)$  (черный, коричневый и синий цвет). Левее показан (коричневая кривая) вид вурф-отображения  $W1(W2)$ . На этом завершается описание суперэллипсов. Далее – переход к рассмотрению сцен, в которых  $\sigma$  имеет ортоформу с *единственной* осью симметрии.



**Рис. 8.** Сводная картина свойств двухосовой скрытой симметрии проекции кривой Ламе, используемой для получения ее инвариантного описания в виде W-отображения для двух случаев выбора sxi-R: в качестве случайной позиции Z и в варианте случайных точек пересечения V касательных, задающих карту двух ДП (D..P и G..N) на HL. На врезках – вид W-функций W-отображений, вычисленных для полюсов V и Z, и образ дескриптора (внизу слева) для циклической цепи октета {A, T, S, R, B, M, J, I}. Остальные пояснения в тексте.

#### 4. ОВАЛЫ С ЕДИНСТВЕННОЙ (НЕЯВНОЙ) ОСЬЮ СИММЕТРИИ

Отличительной (и эмоционально – весьма досадной) особенностью **о** этого рода является *принципиальная невозможность* по итогам успешно локализованного положения неявной оси симметрии вычислить дислокацию **HL** (что как задача достижимо для всех прочих разновидностей **о** со скрытыми симметриями и рассмотрено процедурно в ряде предшествовавших публикаций текущего цикла).

Но этим обстоятельством (его следствие – невозможность опоры на **теорему 2** со схемами быстрого поиска ДП, созданными для этого случая) не исчерпывается список требований *новых* подходов для **оо** (осевого овала): в методах получения **W**-функций для **оо** не пригоден алгоритм вычисления по радиальной схеме, если в качестве ext-**P** выбран плюккеров полюс симметрии **S** (рис. 9), а эффективные (при иных типах симметрии **о**) два тангенциальных метода получения **W**-функций в том же варианте задания ext-**P** порождают *тождественные* кривые (как это происходит для **э**). Рис. 9 объединяет результаты по теме разд. 4: тут и новые алгоритмы вычисления **W**-функций, и демонстрация их вида, а также все необходимые выкладки для случая, когда ext-**P** выбирается случайным образом, не коррелируя ни с правилами для **S**, ни с данными о положении неявной оси симметрии.

Прокомментируем полученные итоги более детально, используя литерную разметку опорных точек и новых поляр на рис. 9.

Итак, в итоге предварительной обработки **оо** для него найдены плюккеров полюс **S** неявной оси симметрии (он принадлежит **HL**, но ориентация этой прямой – *линия горизонта* – вне данных оптической регистрации **оо** не вычислима в принципе!) и расположение **AB** самой этой оси (утолщенная коричневая прямая).

По причинам декларируемого теорией *гармонического* характера радиальной **W**-функции, вычисляемой для **S** по “старой схеме”, схему эту приходится существенным образом усложнить. Сканирующий луч **SI** дает при фиксированных позициях **A** и **B** возможность на каждом шаге дискретного сканирования перевычислять положения точек **L**, **R**, **T**, а также **г**, **к** и **D**. Точки **L** и **R** фиксируются на пересечениях касательной в **I** с касательными в **A** и **B**, т. е. в формальной записи для использованной нотации  $L \Rightarrow t(I) \times t(A)$ ,  $R \Rightarrow t(I) \times t(B)$ .

Позиция **T** инцидентна точке пересечения касательной в **I** с осью **AB**. “Вспомогательная” точка **г** лежит в пересечении прямой **AI** с касательной

в **B**, а схемно-симметричная ей **к** принадлежит пересечению **BI** с касательной в **A**. Их локализация достаточна для определения положения **D** в пересечении **гk** с осью **AB**.

Наконец, координаты **C** вычисляются для пересечения сканирующего луча **SI** с осью **AB**. Все эти структурные формулы внесены на рис. 9 во врезку слева. Массив вычисленных позиций образует подвижную конфигурацию, необходимую для получения ординат второй из двух **W**-функций.

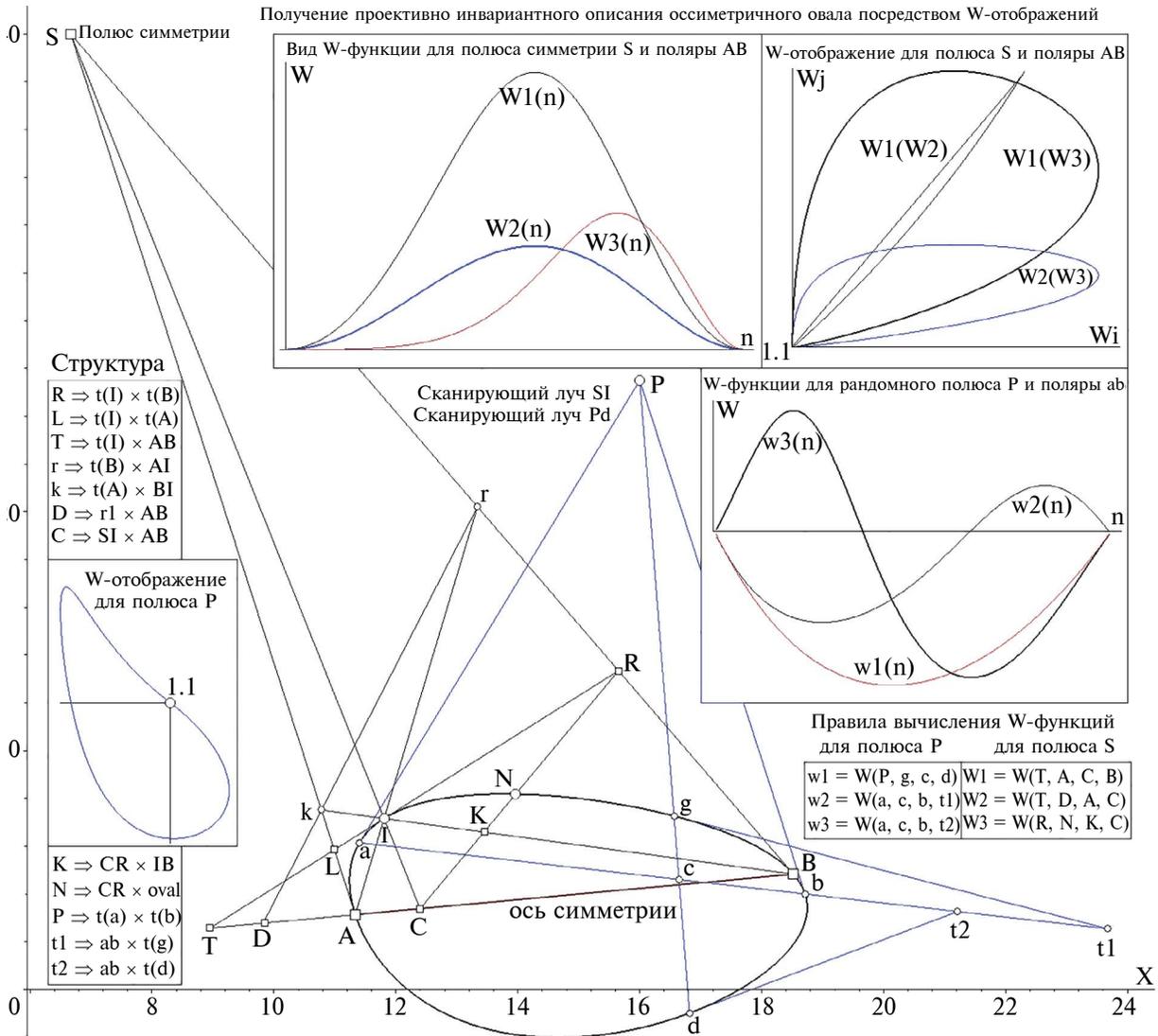
Правило ее задания таково:  $W2(n) = W(T, D, A, C)$ . Первая оставлена без изменений, с ее заданием в виде:  $W1(n) = W(T, A, C, B)$ . В списке “пригодных” функций больше не фигурируют *радиальные*. Причина этого – гармонизм лучей из **S**. К примеру,  $W(S, k, L, A) \equiv 1$ ,  $W(S, г, R, B) \equiv 1$ .

Описанное усложнение схемы позволяет вычислить пару **W**-функций, однако их привлечение для формирования вурф-отображения неэффективно по причинам их *нелинейной зависимости*. **W**-отображение с их помощью представляет собой *однопараметрическую кривую* двукратного покрытия. Ее вид изображен на рис. 9 во врезке сверху справа, где помечен как **W1(W2)**.

Декларация теоретического анализа обсуждаемых условий такова: избежать подобного информативно бедного характера отображения можно лишь при введении в вычислительную схему еще одной точки контура **оо** (детерминированной позицией **I**, но независимой от нее по положению). Эта дополнительная вершина **оо** выбрана в пересечении **N** его контура с прямой **RC**, а кватер вурфа дополняет позиция **K** на пересечении **RC** с **BI**. Получено:  $W3(n) = W(R, N, K, C)$  (см. нижнюю правую врезку на рис. 9).

Введение текущей точки **N** в схему обеспечило желательный характер отображений **W1(W3)** и **W2(W3)** (показаны на врезке рис. 9 справа сверху черным и синим цветом), а сама **W3(n)** изображена левее на врезке (коричневая кривая). Поставленную задачу (ext-**P** как итог анализа симметрий) удалось решить путем усложнения схемы вычислений, получив два приемлемых варианта **W**-отображений. Покажем и обсудим подход к решению задачи без опоры на симметрии.

Полюс ext-**P** выбран случайным образом в позиции **P** (см. рис. 9). Его плюккерова поляр: **ab** (хорда **ab** и все построения для решения согласно позиции **P** выполнены на рис. 9 в синем цвете). Поскольку ни полюс ext-**P**, ни его поляр **ab** более не связаны условиями отношений симметрии, ничто не мешает оставить схему вычислений той же, что была применена для суперэллипсов



**Рис. 9.** Сводная картина по методам и результатам численной обработки овала скрытой осевой симметрии (oo). Две W-функции W1(n) и W2(n), вычисляемые для образа AB (как поляры Плюккера), нелинейно зависимы, поэтому требуется построить функцию W3(n), привлекающую в схему оценки дополнительную точку N. На врезке справа внизу даны формулы вычисления W-функций для плюккерова полюса S осевой симметрии (справа) и для случайной позиции P (слева). На остальных врезках – структурные формулы и вид вурф-кривых для полюсов S и P. Остальные пояснения в тексте.

(в постановке для ext-P в позиции, не связанной с какими-либо симметриями).

Таким образом, сканирующий луч Pgd включает на пересечении с полярной ab четвертую точку c, создавая тем самым возможность вычисления радиальной W-функции вида  $W1(n) = W(P, g, c, d)$ . Стандартная схема с использованием текущей касательной в g дает на пересечении с ab позиции t1 и t2. В итоге получена возможность выполнения правил вычисления тангенциальных вурф-функций:  $W2(n) = W(a, c, b, t1)$  и  $W3(n) = W(a, c, b, t2)$ . Их вид (и вид W-отображения на врезке слева, синим цветом) по итогам модельной эмуляции показан на врезке

рис. 9 (справа в середине, функция W1(n) изображена коричневым цветом). Изложение методов решения поставленной задачи и ее итогов при моделировании сцен, включающих проекции oo, на этом закончено.

### 5. РАДИАЛЬНО (ЦЕНТРАЛЬНО) СИММЕТРИЧНЫЕ ОВАЛЫ

Согласно введенной нами ранее нотификации ортоформ o с симметрией вращения  $R_n$ , различающихся индексом n, ортоформу радиально симметричных o логично включить в систему  $R_n$ , присвоив индекс 2.

Поясним сделанное утверждение, напомним, что индекс  $n$  означает количество поворотов фрагмента дуги угловой меры  $2\pi/n$  в полярной системе – вокруг ее центра, совершаемых с целью получить овальную кривую посредством операции гладкого сопряжения фрагментов. Этот процесс накладывает ограничения на кривизну терминальных участков дуги, которые мы здесь не будем детализировать (они потребуют задания в дифференциальной форме).

Достаточно принять, что процедура генерации дуги-фрагмента, дискретное вращение которой может задать  $\mathbf{o}$ , реализуема. Действительно, разрезав ортоформу  $\mathbf{o}$  радиальной симметрии по произвольной хорде, проходящей через центр, и получив дугу-половинку, можно этот фрагмент меры  $\pi$  радиан повернуть вокруг центра на угол  $\pi$ , чтобы произошло гладкое сопряжение исходного и повернутого фрагментов – с реконструкцией  $\mathbf{o}$  стартовой формы. Описанная процедура разрезания показывает, что в итоге сопряжения созданная фигура оси симметрии иметь не будет (как не имел ее “овал-инкубатор”).

С овалами типа  $R_3$  ситуации существенно сложнее. Результаты, полученных на этом пути, рассмотрены в работах (Николаев, 2015; 2017), где описан ряд универсальных процедур (тесты по индексам  $n$  “3” и “5”) поиска неявного центра  $O$  фигуры  $R_n$ , а для  $\mathbf{o}$   $R_3$  был предложен и испытан метод реконструкции  $HL$  по данным позиции  $O$  у  $\mathbf{o}$ . Об  $\mathbf{o}$  вида  $R_3$  пойдет речь в следующем разделе. Приступим к описанию предпринятых шагов обработки  $\mathbf{o}$  радиальной симметрии.

Аналитически смоделированная (в дискретной аппроксимации на 1 200 вершин) ортоформа  $\mathbf{o}$  радиальной симметрии трансформирована преобразованием гомографии, в результате чего несобственная прямая проективной модели плоскости переместилась из “бесконечных далей” в окрестность фигуры, став линией горизонта  $HL$ . Программа поиска ДП на  $HL$  (которая уже локализована на этапе предобработки) завершила работу, указав на ней позиции двух ДП с разметкой октета вершин, локализуемых этим кваттетом (рис. 10).

Согласно **теореме 2**, гарантируемый ею минимум инвариантных позиций (кваттет на  $HL$ , октет на  $\mathbf{o}$ ) стал полем выбора дальнейших шагов обработки  $\mathbf{o}$  (рис. 11).

В качестве ext-P выбраны два плюккерова полюса (однозначно задаваемых в получившейся конфигурации):  $V$ , не принадлежащий  $HL$  и локализуемый согласно структурной формуле

$V \Rightarrow f(M) \times f(Q)$ , и точка  $H$  на  $HL$ , задаваемая в пересечении  $H \Rightarrow OV \times KP$ . Выбор  $V$  и  $H$  сделал возможным оценить позиции их поляр: у  $V$  ею стала  $MQ$ , а плюккерова поляр для  $H$  это  $LZ$  (см. рис. 11).

Заметим: луч из *любой* точки на  $HL$ , проходящий через  $O$ , формирует кваттет вурфа, всегда *гармонического*, но это свойство не делает привлечение радиальной схемы для вычисления  $W$ -функции  $W1(n)$  сколько-нибудь малоприменимым.

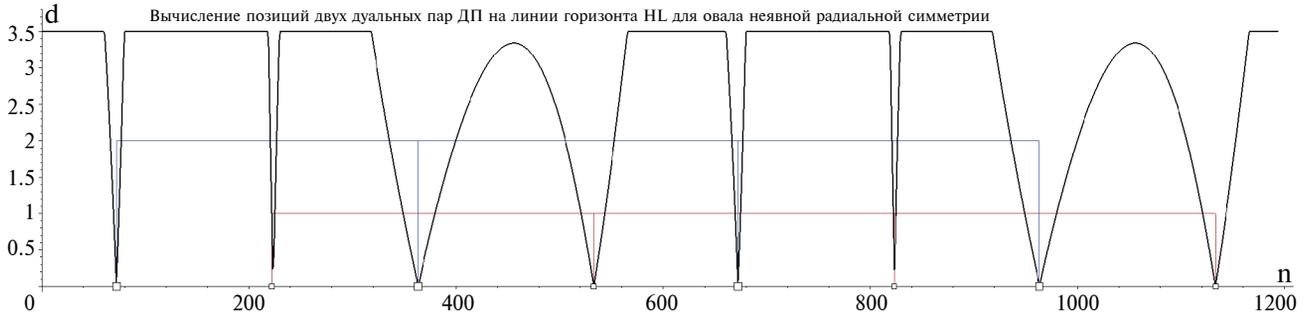
На врезке в верхней части рис. 11 показан вид радиальной функции  $W1(n)$  (синяя кривая). Она лишь единожды пересекает гармонический уровень  $W = 1$ , что и соответствует прохождению луча сканирования через центр  $O$  (т. е. и через  $V$ ). Сканирование из  $V$  для  $W1(n)$  (черная кривая на врезке внизу справа) показывает двукратное прохождение луча через уровень  $W = 1$ .

Также никаких неприятных вырождений для  $W$ -функций не произошло в схеме тангенциальных вычислений. Набранная статистика (для других модельных форм  $\mathbf{o}$ ) не показала существенных отличий (по сложности рисунка и степени уплощения) для вида финальных  $W$ -отображений в альтернативе выбора “ $V$  или  $H$ ”.

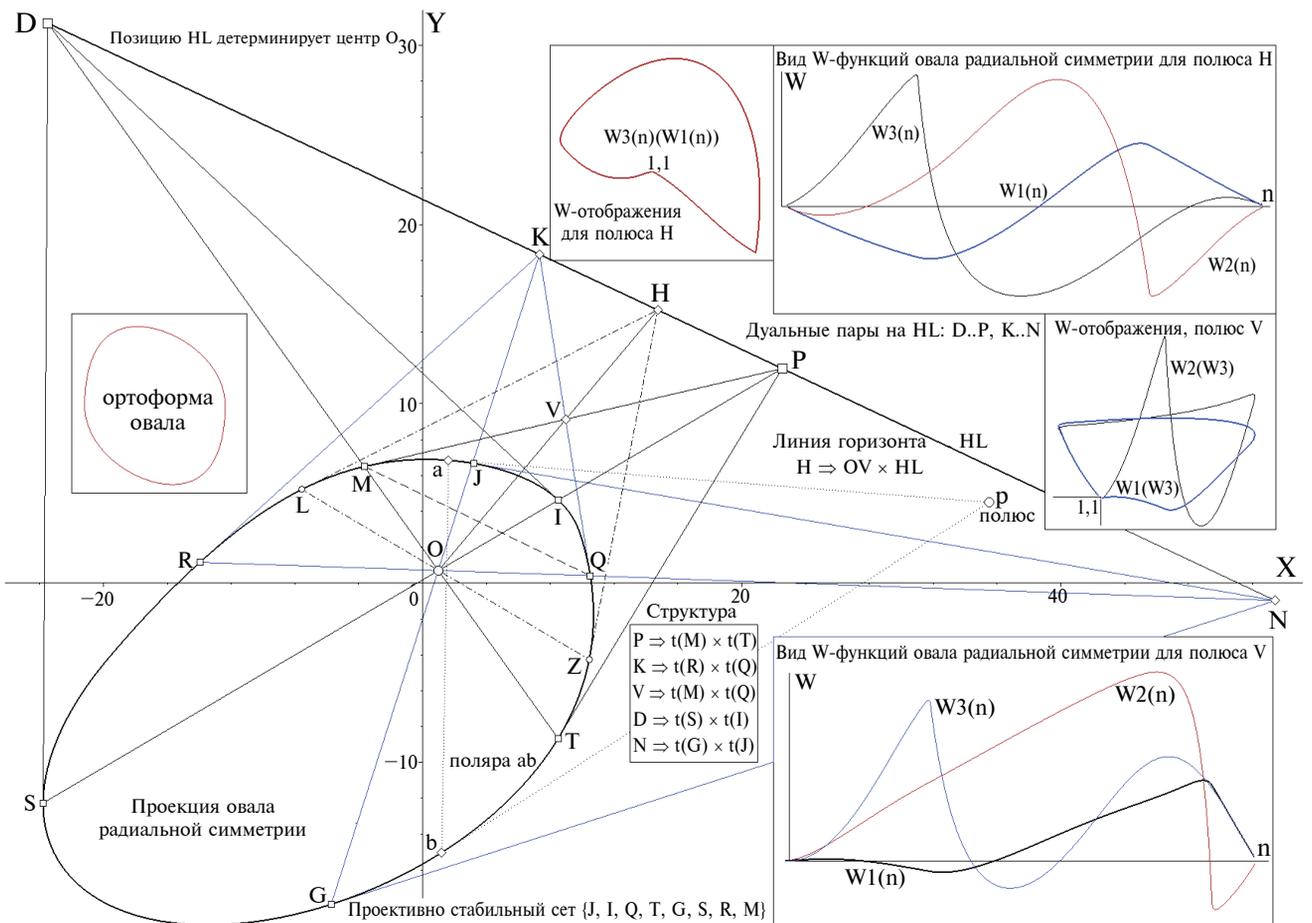
Перейдем к описанию итогов моделирования сцен “ $\mathbf{o} + \text{ext-P}$ ” при использовании для  $\mathbf{o}$  случайной позиции  $P$ , не коррелирующей с позиционными атрибутами неявно радиальной симметрии. На рис. 11 эта позиция  $p$  показана, и пунктирными прямыми отмечена для нее локализация  $ab$  в роли плюккерова полюса. Вид  $W$ -функций и  $W$ -отображений, полученный для полюса  $p$ , показан на рис. 12. Функции  $W2(n)$  и  $W3(n)$  примечательны взаимной квази-зеркальной симметрией, а  $W1(n)$  радует своей двуфазной гладкостью и аналогичной симметрией.

Предварительный вывод по материалам, включающим описание данного этапа исследований, можно сделать такой: подчеркиваемая в предшествовавших публикациях цикла разобщенность подходов к инвариантному описанию  $\mathbf{o}$  с симметриями, особо контрастная для  $\mathbf{oo}$  и центрально симметричных  $\mathbf{o}$  (см. разд. 3 и 5 в сравнении с итогами разд. 4) в варианте “ext-P из внутреннего ресурса” исчезла по причинам сделанных (и успешно промоделированных в сериях тестов) структурных предложений по правилам однозначного выбора ext-P и добавления численно малозатратных приемов получения независимых  $W$ -функций для  $\mathbf{oo}$ .

Переходим к анализу сцен с  $\mathbf{o}$  типа  $R_3$ .



**Рис. 10.** Вид гистограммы, осуществляющей поиск (на HL) ДП и их кластеризацию по квартетам (синий и коричневый сет с метками “квадрат”) для о неясной радиальной симметрии. Численная модель на 1 200 вершин аппроксимации. Комментарии в тексте.



**Рис. 11.** Сводная картина дислокации двух ДП на HL в окрестности о неясной радиальной симметрии, детерминирующих позиции полюсов H и V, относительно которых вычислены все требуемые (для получения инвариантных отображений) W-функции. Вурф-продукты для H и V показаны на врезках (выше – для H, ниже – для V). Все комментарии в тексте.

## 6. СВОЙСТВА ДП НА НЛ И ВЫБОР EXT-P ДЛЯ О ТИПА $R_3$ С ОСЕВЫМИ СИММЕТРИЯМИ

В предыдущих публикациях цикла (Николаев, 2015, 2016) описаны методы, с помощью которых для проективно трансформированной ортоформы  $o$  типа  $R_3$  удается при выборе произвольной (случайным образом зафиксированной вершины  $o$ ) указать два его проективных аналога на контуре с образованием триады одноименных вершин на порождающей 120-градусной дуге сопряжения (при генерации ортоформы  $o$ ), названной ансамблем *ротационной корреспонденции* (АК). Успешное вычисление АК и привлечение ДАК (дополнительного ансамбля, формируемого из касательных к АК) позволяет оценить координаты неявного центра, что в свою очередь, создает возможность дислокации НЛ.

Перейдем к конкретным модельным постановкам и их практическим результатам. Численные тесты вели на моделях  $o$  типа  $R_3$  с тремя осями симметрии при плотности представления дискрет-аппроксимации в 1 800 вершин. Разработанная (к началу этого цикла исследований — для автоматизации и кластеризации в данном случае объемного массива данных) программа поиска ДП обнаружила 48 вершин контура, в которых касательные причастны к организации структуры для 12 ДП (по 4 на каждый период ротации) и расклассифицировала их (по квартету на каждую ДП, рис. 13).

Такое обилие ДП было неожиданным по причине резкого несоответствия “переборно-ручному” итогу их обнаружения на фрагменте контура, ближайшего к НЛ. Результат кластеризации прояснил роль осей симметрии, дав возможность составить карту узлов (узлами именуются точки пересечения поляра, образующих ДП).

Согласно теоретическим прогнозам, в массиве 24 позиций (на НЛ), komponующих ДП, по причинам наличия трех осей симметрии у ортоформы какая-то часть дуальных плюккерových поляр могла оказаться непригодной для вычисления  $W$ -функций, что и предстояло выяснить в первую очередь.

Картину попыток обнаружить среди зафиксированных поляр те, для которых  $W1(n)$  не образуют гармонические плато, а  $W2(n)$  и  $W3(n)$  не оказываются тождественно совпадающими, иллюстрирует рис. 14.

Показан фрагмент НЛ с двумя ДП (М..N и Р..Т, полюс Р — за пределами поля рисунка), поляры которых {LR, АВ, И, DE} непригодны для получения  $W$ -отображений, и лишь прием задания

вспомогательной позиции  $V$  в пересечении пары смежных касательных (вычисляемой согласно структурной формуле  $V \Rightarrow t(R) \times t(I)$ ) обеспечивает для точки  $S$  (где  $S \Rightarrow CV \times MN$ , а ей самой отводится роль полюса ext-P) получение всех требуемых вурф-композиций на поляре KQ для формирования целевого  $W$ -отображения  $W1(W2)$  (вид  $W$ -функций и  $W$ -отображения вынесен во врезки рис. 14).

Требовалось прояснить всю картину отношений симметрии, характерных для этого вида сцен (рис. 15).

Список обнаруженных особенностей достаточно громоздок для их описания и комментирования непосредственно текстом, тем более что в нашу задачу не входит исследование симметрий и карты ее источников, а ровно, наоборот, — поиск возникающих в связи с симметриями путей обхода препятствий для решения задачи стабильной репрезентации сцены.

Следствием этих соображений стал материал, концентрирующий на рис. 15 (в компактной графической и формальной структурной форме) ряд наиболее интересных особенностей проявления симметрии (зафиксированных в модельных тестах).

Три потока параллельных попарных связей узлов (на рис. 15 показан один, на проекции сходящийся в D1) организуют для ортоформы картину тождественного повтора свойств (с поворотом на 120 град.). По этой причине кажущееся обилие возможных позиций для выбора ext-P является нацело иллюзорным.

Показ решения для полюса d2 (врезки слева вверху, с двумя видами  $W$ -отображения  $W2(W1)$  и  $W3(W1)$ ) следует квалифицировать уникальным, поскольку решение для d1 является в точности тождественным продукту для d2. Полная картина (см. рис. 15 отражает лишь выборку ДП, что относится к лежащим в окрестности  $o$ ) включает в себя еще одну позицию полюса, дублирующего выкладки для d1 и d2.

Три эти позиции являются осевыми, и на ортоформе соответствуют хордам, идущим через центр и лежащим на осях. Врезка (справа вверху) на рис. 15 помогает прояснить эту картину графически: полюс d1 принадлежит хорде 5–11, d2 соответствует паре узлов 2–7, а третий полюс позиционирует пара 9–12.

Поясним “странный” сбой в нумерации узлов (между третьим и четвертым лежит маркированный номером 12). Он — следствие работы программы, детектирующей на НЛ положения ДП в последовательном переборе вершин  $o$  — в поиске удовлетворяющей плюккерovu критерию

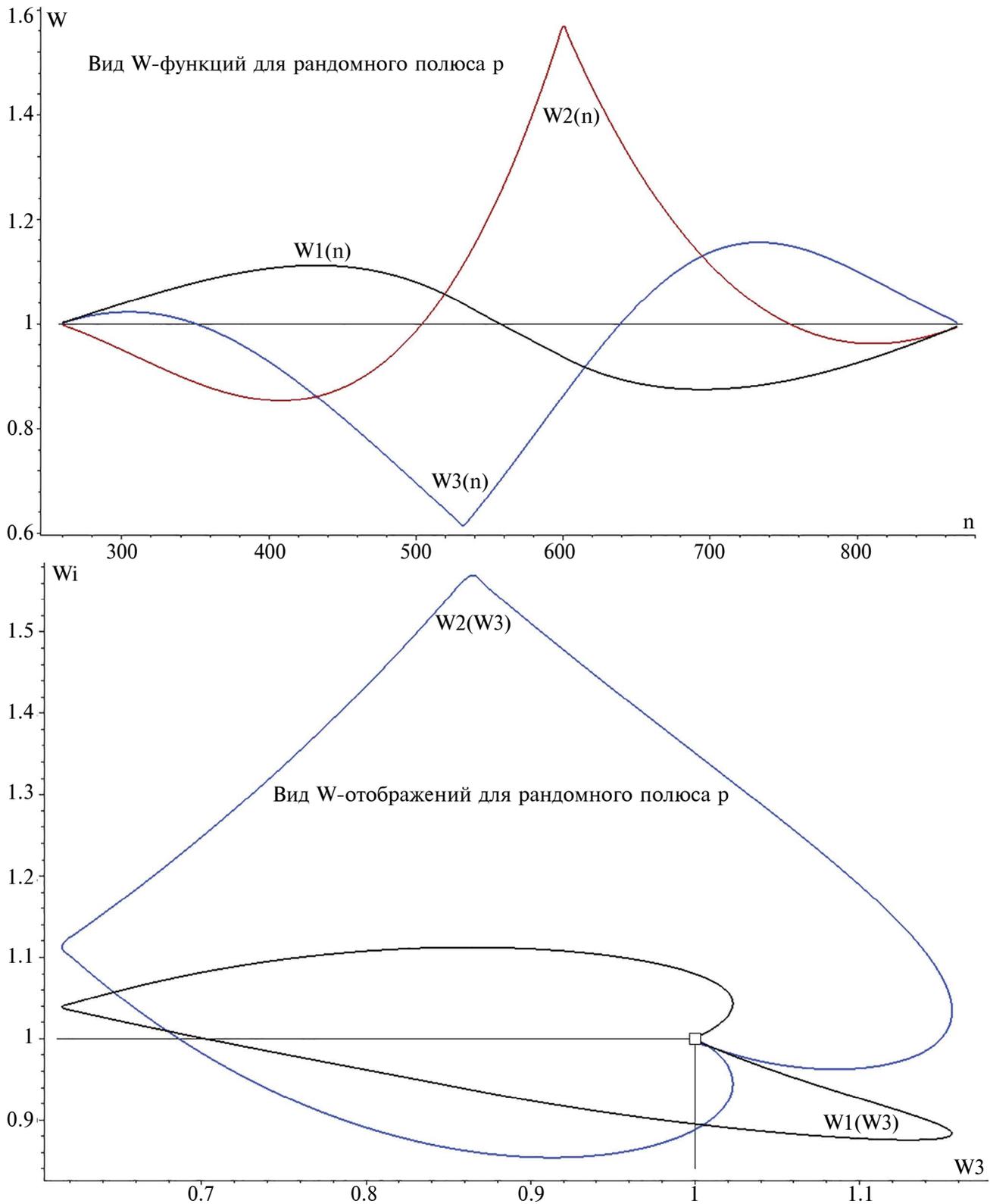
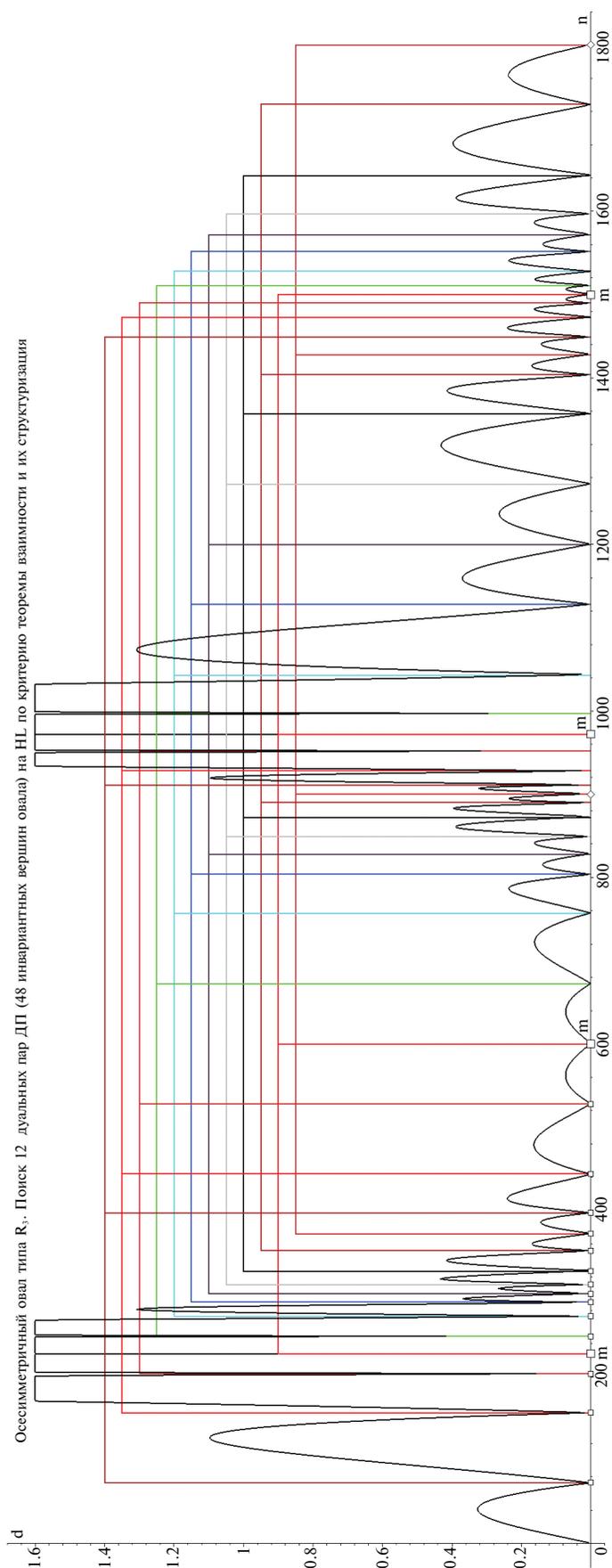


Рис. 12. Вид  $W$ -функций и  $W$ -отображений для случайной позиции  $p$ , локализация которого относительно  $o$  и  $HL$  показана на рис. 11. Остальные пояснения в тексте.



Оссиметричный овал типа  $R_3$ . Поиск 12 дуальных пар ДП (48 инвариантных вершин овала) на НЛ по критерию теоремы взаимности и их структуризации

Рис. 13. Вид гистограммы детекции 12 ДП на НЛ и их кластеризация на четверты вершин (массив 1 800 дискретных позиций контура) для проекции  $\sigma$  типа  $R_3$ , обладающего тремя осями скрытой симметрии (размечены и объединены 48 вершин). Комментарий в тексте.

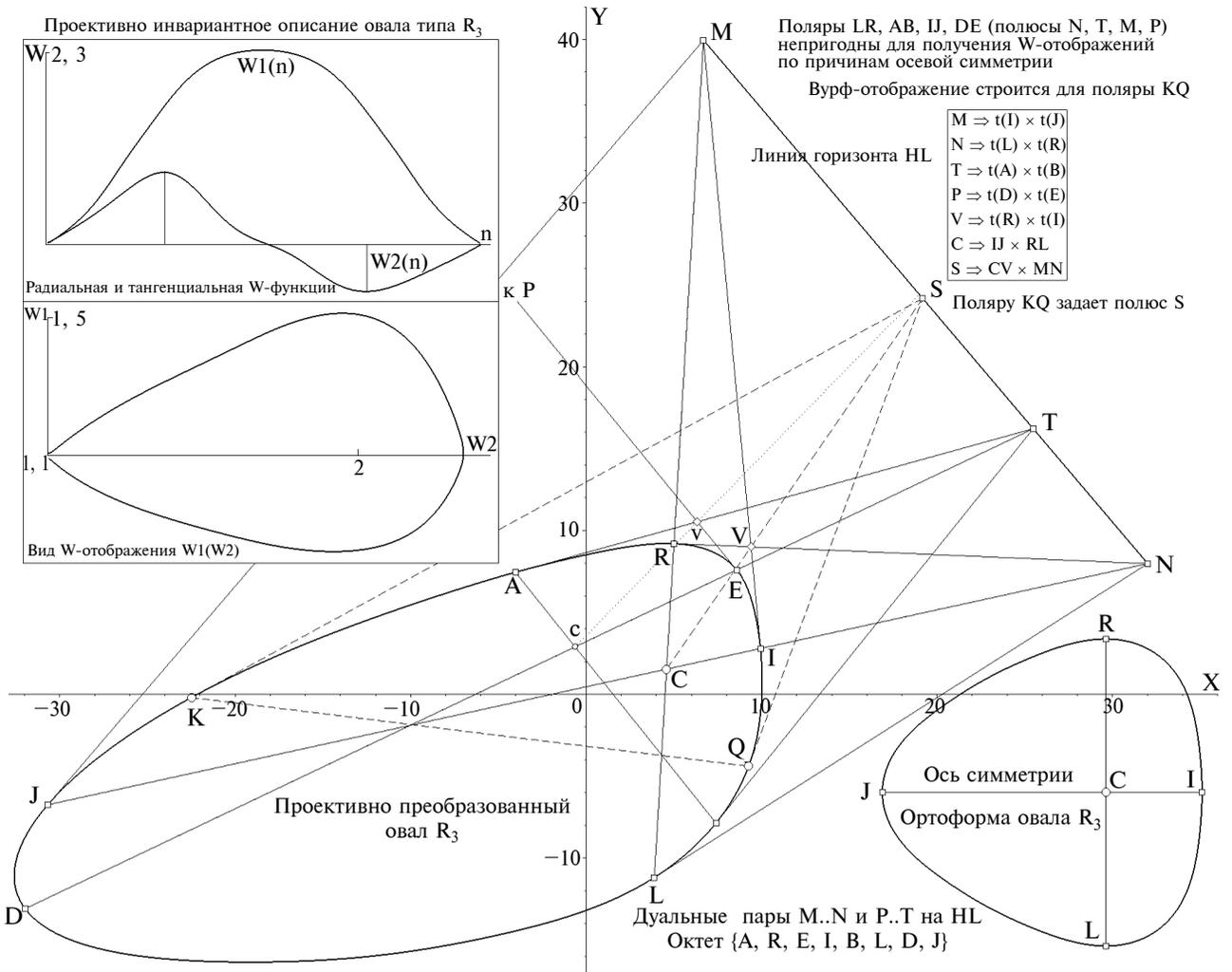


Рис. 14. Картина предварительного анализа сцены с HL в окрестности проекции  $o$  типа  $R_3$ , с показом ДП М..N и Т..Р, детерминирующих позицию полюса V, а по нему – и S, относительно которой вычислены требуемые вурф-продукты; их вид показан на врезках слева. На врезках справа структурные формулы (вверху) и вид ортоформы с дислокацией одной из осей симметрии и поляры RL для полюса N (внизу). Пояснения в тексте.

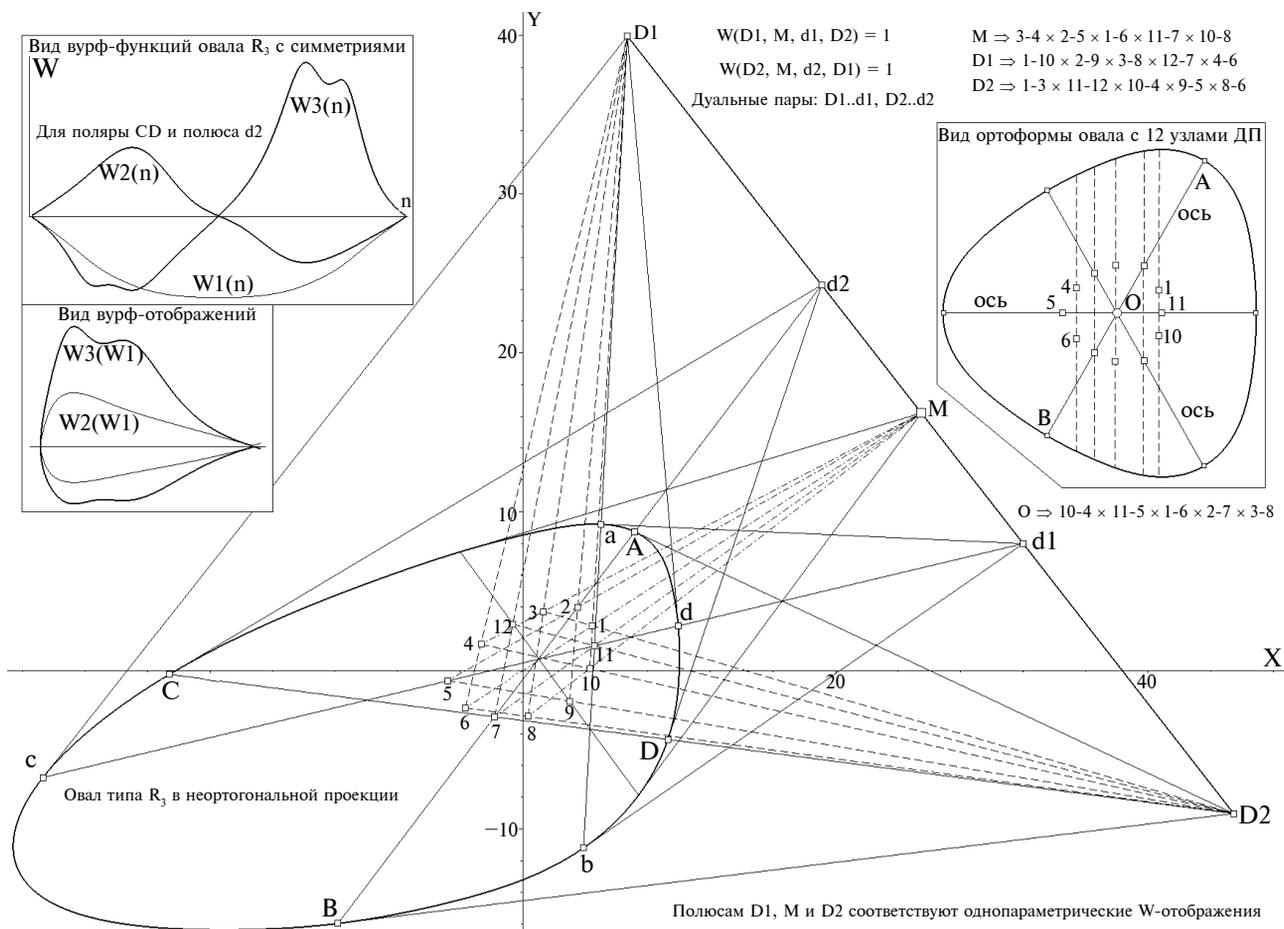
дуальности. Однако этот анализ шел не на ортоформе  $o$ , а на ее проекции, с ее закономерностями нумерации.

Внимательное изучение гистограммы (см. рис. 13) поможет читателю убедиться в отсутствии “ошибки автора” (этот вклинившийся кластер маркирован красными ребрами, литерой  $m$  и метками “крупный квадрат”).

Еще один “авторский просчет” в потере шестой пары (а именно 9–12) среди перечисленных пар, для которых хорды проходят через центр O (справа в середине поля на рис. 15), – итог объяснимой логики: именно задаваемое парой 9–12 направление “не изобразимо” на рис. 15 позицией пересечения хорды 9–12 с HL ввиду своей почти параллельности оной.

Причина обеих “флуктуаций изложения” общая и продиктована сознательным авторским выбором – подчеркнуть проективный характер соседства на безграничной плоскости, которой принадлежит  $o$ : в процессе численной обработки позиционных данных, при прохождении бесконечно удаленных точек пересечения касательных, происходит смена отношения порядка *левый–правый*, что и порождает срыв в нумерации вершин.

Дополнить замечания следует и про точность выполнения эвристик пересечения центра O хордами парных узлов: осевые пересечения 2–7, 5–11, 9–12 являются аналитически точными, тогда как триада 1–6, 3–8, 4–10 образует в пересечении крошечный треугольник вокруг O (для ортоформы точка O находится в центре масс этого треугольника).



**Рис. 15.** Картина симметричной проективной организации 12 узлов полной карты ДП для о типа  $R_3$ , для его ортоформы проявляющаяся композицией трех параллельных пучков, объединяющих по пять прямых каждый, где прямые инцидентны регулярной структуре пар узлов (на врезке справа сверху показан пучок с проективным центром в  $D1$ , для которого  $d1$  на  $HL$  образует ДП). На врезке слева сверху – вид трех  $W$ -функций и пары  $W$ -отображений, вычисленных для полюса  $d2$  и полярны  $CD$ . Остальные пояснения в тексте.

Целесообразно также развенчать усилия в поиске позиции ext-P приемом использования вспомогательной точки  $V$  (см. рис. 14), так как в итоге полного анализа карты скрытых симметрий, с найденной триадой позиций  $d1, d2, d3$ , с совпадающими функциями описания  $o$ , привлечение  $V$  не требуется.

Выводы по материалам раздела сформулируем таким образом.

1. Программа поиска на  $HL$  (в качестве ext-L) всех 12 ДП и последующей кластеризации кварталов вершин  $o$  позволила выявить сложный характер отношений осевой симметрии на проекции  $o$  (с их трехкратным дублированием), ранее нами не исследованный.

2. В итоге проведенного анализа скрытых проективных симметрий  $o$  типа  $R_3$  на основе

модельных численных экспериментов выявлен и иллюстративно истолкован ряд новых аналитических и эвристических свойств сета узлов ДП во внутреннем поле фигуры.

3. Несмотря на наличие на  $HL$  большого числа ДП (задающих для  $o$  массив 48 проективно стабильных вершин), однозначный выбор уникальной позиции в качестве ext-P оказался реализуемым (благодаря анализу п. 2), что обеспечило получение необходимых вурф-отображений для проективно инвариантного описания  $o$  без привлечения ext-P извне.

4. Задание ext-P, как случайной внешней позиции полюса, для серии тестовых модельных испытаний не встретило трудностей вычисления всех требуемых вурф-функций и вурф-отображений – по единой схеме формирования радиальной и тангенциальных функций.

## 7. ВЫБОР EXT-P ДЛЯ О ТИПА $R_3$ БЕЗ ОСЕВОЙ СИММЕТРИИ И ЕГО ИНВАРИАНТНОЕ ОПИСАНИЕ

Раздел посвящен обсуждению проективных свойств  $o$  типа  $R_3$ , ортоформа которого не обладает дополнительным свойством *осевой* симметрии (когда ортоформа имеет три оси; Николаев, 2015).

Вариант неосевой (хотя и периодической, с периодом  $2\pi/3$ ) структуры ортоформы  $o$  нами ранее не рассматривался, поскольку методы поиска неявного центра  $O$  симметрии использовали исключительно особенности АК (ансамбля корреспонденции, вычисляемого для произвольной триады вершин с тождественным поведением локальной кривизны), не привлекая *осевых* признаков. Фигуры трехосевого типа генерировались с помощью аналитического задания малочленами ряда Фурье со 120-градусным периодом его тригонометрических аргументов.

Для новой безосевой постановки те же малочлены привлекали в схеме *усреднения* координат *двух* овалов различающегося аналитического задания с относительным их поворотом в  $\pi/6$  радиан вокруг общего центра. Априори этот метод гарантировал гладкость “синтетической” фигуры, что автоматически не следовало в случае ее генерации посредством би-сплайн-интерполяции (с “ручным” заданием узлов).

Модельная постановка задачи – та же, что и для осевого  $o$  типа  $R_3$ , т. е. полагаем найденными на этапе предобработки *проекции*  $o$  (с использованием АК и ДАК) позицию неявного центра  $O$  и расположение  $HL$ . Доступна для анализа (в целях выбора критерия, согласно которому задается позиция ext-P) и ортоформа  $o$ , поскольку ее образ может быть вычислен с помощью матрицы обратного преобразования, переводящей линию горизонта  $HL$  в несобственную прямую модели проективной плоскости  $o$ .

Для демонстрации полученных результатов выбран типовой пример  $o$ , численная модель которого, сгенерированная для 1 800 вершин аппроксимации, была обработана программой (той же, что использовалась при решении задач в разд. 3, 5 и 6) поиска на  $HL$  полного набора ДП и кластеризации проективно стабильных позиций контура  $o$  (типа  $R_3$ ), соответствующих этим ДП (рис. 16). В итоге зафиксированы 6 ДП, карта узлов которых была обследована в целях задания однозначного критерия для выбора координат ext-P (рис. 17 и 18).

Согласно избранному *критерию 1*, выбирается плюккерова поляра АВ, инцидентная паре узлов  $O_1-O_2$  с их *максимальным* расстоянием среди

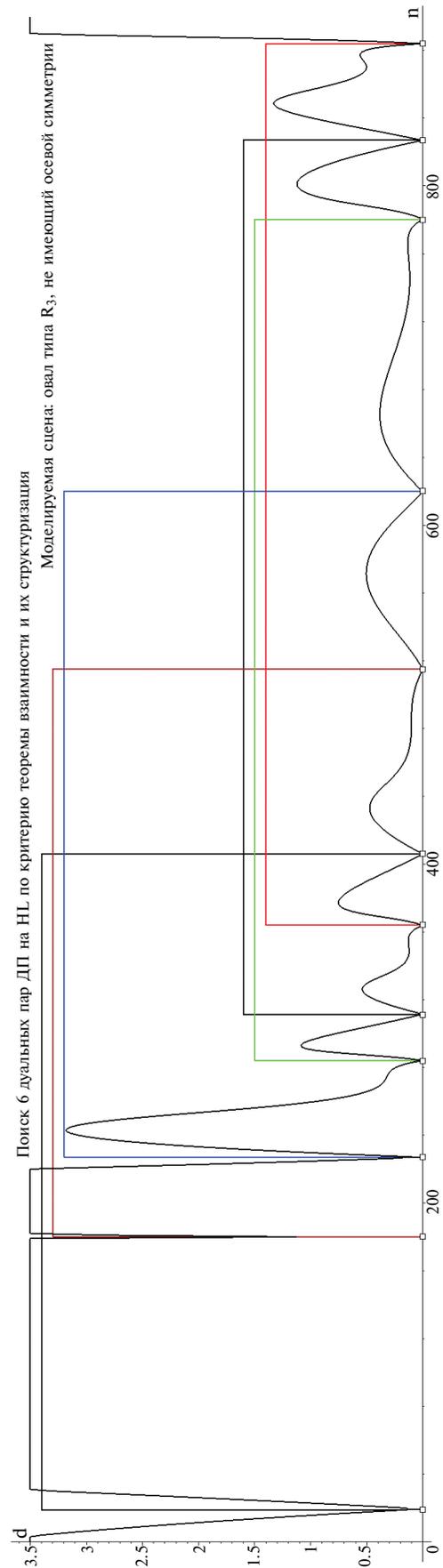


Рис. 16. Вид гистограммы поиска ДП на  $HL$  у  $o$  типа  $R_3$ , не имеющего трех скрытых осей симметрии, и их кластеризация на четверты вершин для шести ДП. Пояснения в тексте.

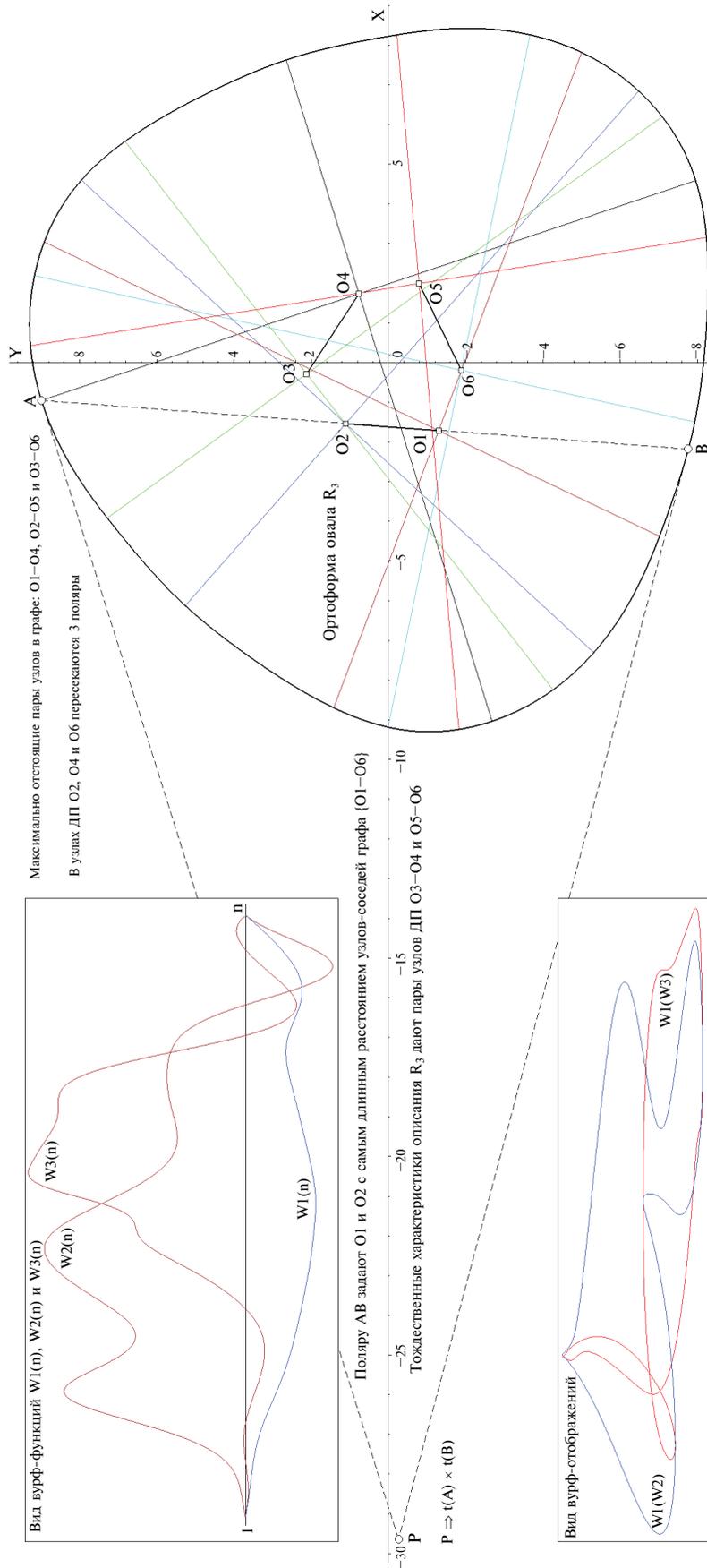


Рис. 17. Картина попарной регулярной организации узлов ДП у ортоформы  $\sigma$  типа  $R_3$ , не имеющего трех скрытых осей симметрии, для которого в качестве плоскокровой поляры выбрана хорда АВ, инцидентная узлам O1 и O2, относительно полюса Р которой и вычислены необходимые W-функции и пара W-отображений (их вид показан на врезках слева), а уникальность выбора Р основывается на тождественности вурф-продуктов, получаемых для поляр с парами узлов O3–O4 и O5–O6. Остальные пояснения в тексте.

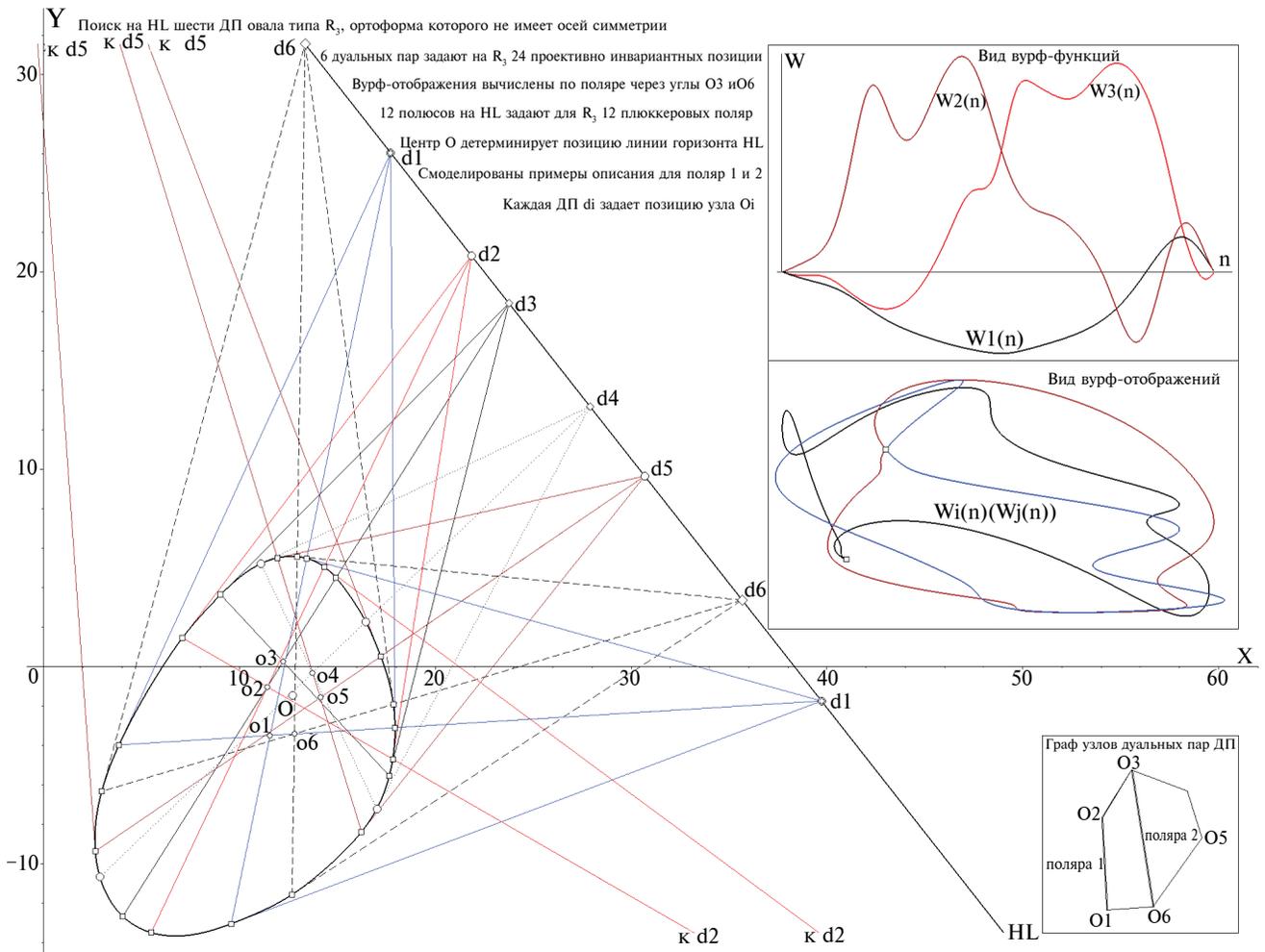
узлов соседей (на циклическом сете  $\{O1 \div O6\}$ ) ортоформы  $o$ , а ее плюккеров полюс  $P$  позволяет вычислить требуемые функции и отображения в роли позиции ext- $P$  (см. рис. 17).

Заметим, что в силу тройного повтора проективно инвариантных свойств контура объявленный выбор поляры (по узлам  $O1-O2$ ) идентичен своим финальным  $W$ -отображением, получаемым для поляр по парам  $O3-O4$  и  $O5-O6$ , т. е. вариантов, различающихся по критерию 1, – нет.

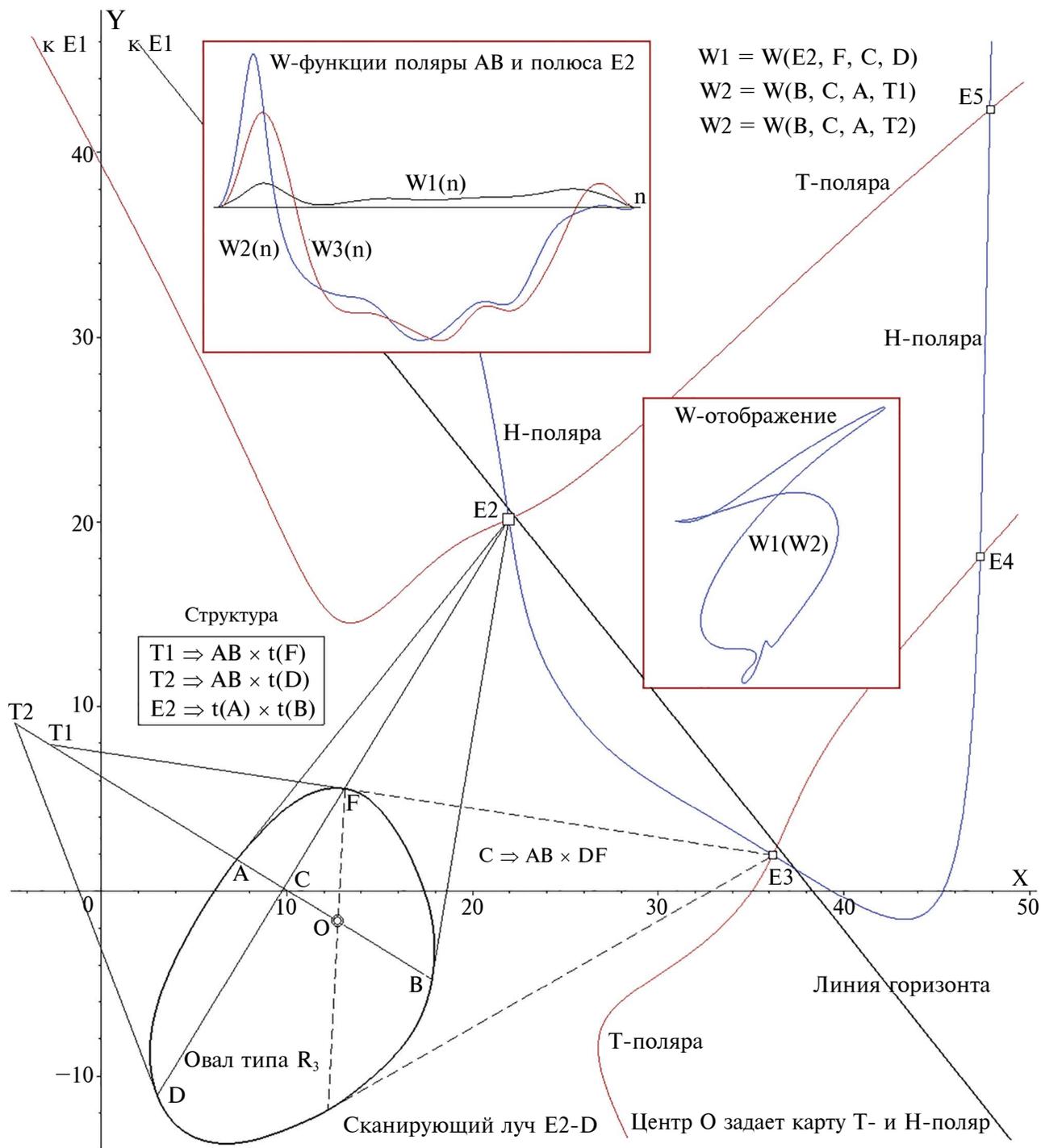
На врезках рис. 17 показаны: триада  $W$ -функций (вверху: схема радиальной и двух тангенциальных) и двух  $W$ -отображений (ниже:  $W1(W2)$  и  $W1(W3)$ ). По причинам той же периодичности свойств карты узлов на рис. 17 зафиксирована (текстом и графически – на сетке поляр для ортоформы) особенность: в узлах ДП  $O2, O4,$

$O6$  пересекаются *три* плюккерových поляры, фиксируемых по итогам вычислительного поиска ДП.

Альтернативный однозначный выбор для позиции ext- $P$  возможен по критерию 2 (критерий с выбором минимальных расстояний в парах соседних узлов не станем здесь рассматривать – он не привносит ничего принципиально нового): для задания поляры, детерминирующей положение ext- $P$ , предлагается выбрать не одну из поляр, полученных в итоге поиска ДП, а прямую, на которой лежат два узла согласно топологической схеме  $N-(N+3)$ , т. е. равно приемлемыми будут прямые, проходящие через пары  $O1-O4, O2-O5$  и  $O3-O6$  (заметим, что на ортоформе данный выбор соответствует максимально отстоящим парам узлов выпуклой оболочки  $\{O1 \div O6\}$ ).



**Рис. 18.** Более подробная карта связей шести ДП на HL с регулярной композицией узлов в поле проекции  $o$  типа  $R_3$  (не обладающего скрытой трехосевой симметрией) с показом на его контуре дислокации 24 стабильных вершин и демонстрацией (на врезке справа вверху) вида триад  $W$ -функций и  $W$ -отображений, вычисленных для поляры с парой узлов  $O3-O6$ . На нижней врезке (справа) дан вид графа 6 узлов с выбором пар для двух примеров вычисления вурф-продуктов по полярам с парами  $O1-O2$  и  $O3-O6$ . Комментарии в тексте.



**Рис. 19.** Сводная карта выбора позиции ext-P для вычисления необходимых инвариантных отображений для неосевого о типа  $R_3$ , не использующего аппарата ДП на HL, но задающего уникальные координаты ext-P путем оценки дислокации эллиптических точек (теорема 1) с выбором одной из пяти (именно E2) согласно некому проективному критерию. На врезках показан вид W-продуктов согласно единой схеме. Все пояснения в тексте.

На нижней врезке справа (см. рис. 18) показан вид выпуклой оболочки узлов  $\{O1 \div O6\}$  с двумя выделенными направлениями поляр ( $O1-O2$  и  $O3-O6$ ), задающими согласно *критериям 1 и 2* альтернативные позиции ext-P. Основное поле рис. 18 занимает проекция  $\mathbf{o}$  (неосевой тип  $R_3$ ) с близлежащим фрагментом HL, на котором размечены (со связями через узлы  $O1 \div O6$ ) позиции ДП.

Полным комплектом на рис. 18 представлены лишь ДП d1 (синие прямые) и d6 (пунктирные прямые), остальные – лишь одним из полюсов. Вид приведенных (на врезках справа вверху) трех W-функций и всех трех W-отображений соответствует выбору полюса ext-P согласно *критерию 2*, т. е. его полярой была прямая, проходящая через узлы O3 и O6. Относительно отображений уточним: черная кривая соответствует функциональной зависимости  $W2(W3)$ , синяя –  $W1(W2)$ , коричневая –  $W1(W3)$ .

В качестве компромиссного варианта между постановкой со случайным заданием положения ext-P и его позицией, вычисляемой по избранному критерию для набора ДП на HL, на модельных тестах был исследован метод выбора ext-P, использующий декларации **теоремы 1** о наличии в окрестности  $\mathbf{o}$  не менее трех *эллиптических* точек (вычисляемых в пересечении T- и H-поляр), порождаемых неким произвольным полюсом int-P. В качестве int-P целесообразно избрать положение O неявного центра  $\mathbf{o}$  (рис. 19).

Таким образом, позиция ext-P детерминирована, но не связана с HL и с ДП, инцидентными ей. Критерий проективно однозначного выбора из пяти (в данном модельном случае) позиций  $\{E1 \div E5\}$  был связан с экстремумом *углового вурфа* для E, поскольку для его оценки всегда доступен проективный пучок четырех лучей (с центром в E): пары внешних касательных к  $\mathbf{o}$  и касательных к каждой из двух криволинейных поляр.

Для модельного случая рис. 19 в согласии с описанным критерием избрана позиция E2, для которой и были проведены (по стандартной схеме) требуемые вычисления, обеспечившие формирование финального отображения. На врезках показан вид триады W-функций и карта отображения  $W1(W2)$ . В серии тестовых испытаний не возникло проблем с однозначностью выбора ext-P либо с необходимостью отойти от стандартной схемы привлечения W-функций.

Единообразие повестки отчетов (каждый раздел типизирует  $\mathbf{o}$  с его целевой обработкой) требует коснуться итогов модельных испытаний на неосевом  $\mathbf{o}$  типа  $R_3$  для случая, когда позиция ext-P выбирается случайным образом. На рис. 20 изображена та же проекция моделируемого  $\mathbf{o}$ , что и на рис. 19, только теперь получение

целевого описания не требует этапов предварительной обработки  $\mathbf{o}$ : сцена задана предельно лаконично, как “ $\mathbf{o} + \text{ext-P}$ ”.

Поиск ДП для P дал триаду, описанную в разд. 2 (см. рис. 5): найдены позиции D и d по обе стороны от хорды = поляры AB, что и создало повод вычислить не только все требуемые оценки для полюса P (в качестве первичной позиции), но и дополнить их аналогичным инвариантным описанием теперь уже для вторичного полюса D, что и предьявлено на четырех врезках рис. 20 (для P справа, для D – слева).

Этим модельным примером, эмпирически показавшим работоспособность избранного метода вычисления W-отображений, в том числе и для эклектических постановок, не требующих изменений универсальной схемы вычисления W-функций, завершим раздел и преимущественно экспериментальную часть изложения итогов компьютерного моделирования задачи.

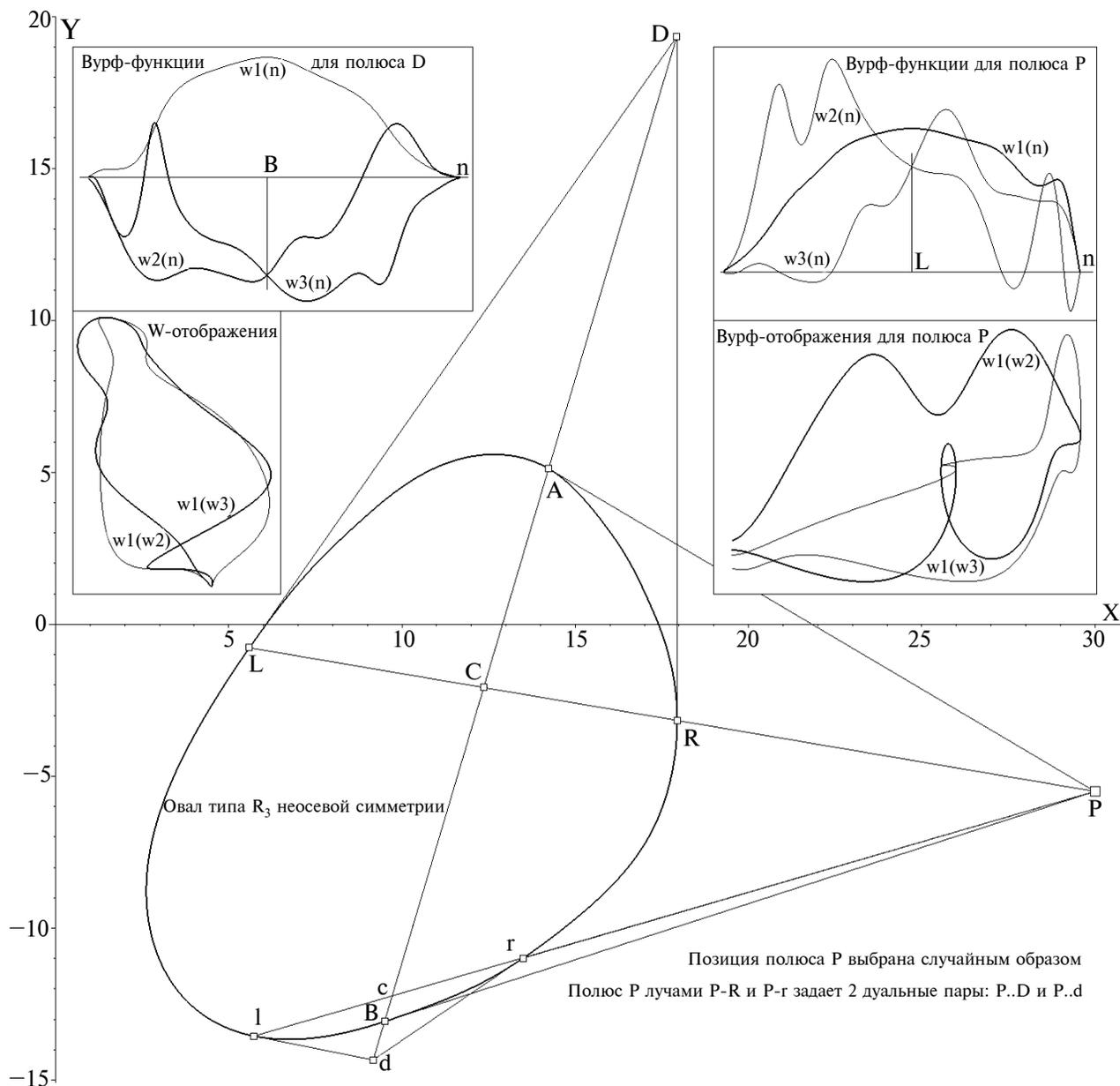
## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Повторим: конструкт ДП имеет истоком теорию полюс-полярного соответствия квадратичных кривых (коник) и базовую теорему взаимности для них (Глаголев, 1963; Моденов, 1969).

Взаимосвязь *полюса и поляры* из мира коник такова: *прямолинейная поляра* соответствует прямой, проходящей через точки касания к эллипсу из внешнего *полюса*. В диспозиции “внешний полюс, внутренняя поляра” однозначная их связь для  $\mathbf{o}$  общего вида неизменна при любых проективных трансформациях  $\mathbf{o}$ , что теряет свою приложимость для  $\mathbf{o}$  в ситуации “внешняя поляра, внутренний полюс”.

Тем не менее из идеи теоремы взаимности удастся вычленить условное правило дуальности отношений. Связь позиций двух полюсов и двух плюккеровых поляр, гарантированная для коник, редуцируется в случае с  $\mathbf{o}$  к связи уже *уникальной*: для некоторой позиции полюса P1 вне  $\mathbf{o}$  можно искать такую позицию P2, что поляра p1 пройдет через ext-P2, а полюс P1 будет принадлежать полюре p2. Эти два полюса нефиксированного *внешнего* расположения стали носителем дуальных свойств в **теореме 2**: “На прямой extL *произвольной* дислокации по отношению ко всякому  $\mathbf{o}$  имеется не менее двух проективно инвариантных ДП”.

Ведущиеся более четверти века попытки предложить методы и схемы дискретной обработки  $\mathbf{o}$  *общего вида*, приемлемые (по устойчивости, точности и вычислительным затратам) в рамках проективно инвариантного их представления в задачах автономного распознавания, по мнению исследователей, не увенчались внушающим



**Рис. 20.** Итоги вычисления требуемых инвариантных описаний для неосевого  $\circ$  типа  $R_3$  в случае, когда в сцене “ $\circ + \text{ext-P}$ ” позиция  $P$  задается случайно (без опоры на анализ скрытых симметрий). “Стартовая” позиция  $P$  (как и в рассмотренном случае  $\circ$  общего вида, см. рис. 5) обеспечивает триаду ДП:  $P..D$  и  $P..d$ , создавая возможность вычисления  $W$ -отображений не только для полюса  $P$ , но и относительно дополнительного дуального  $D$ , что и показано на врезках (справа – для  $P$ , слева – для  $D$ ). Остальные пояснения в тексте.

надежды успехом (Olver, 2001; Hann, Hickman, 2002; Musso, Nicolodi, 2009; Hoff, Olver, 2013). Громоздкость полнопереборных схем (с их неутешительной асимптотической сложности алгоритмов), а главное – координатный шум оптической регистрации  $\circ$  лишают проблему перспектив разрешения. Процедурный тупик можно обойти приемом расширения сценария задачи – усложнением исходной композиции до вида “ $\circ + L$ ”, “ $\circ + \text{int-P}$ ” либо “ $\circ + \text{ext-P}$ ”.

Востребованность задач автоматического опознавания объектов типа  $\circ$  побуждает искать эффективные подходы с предложениями различных “полуинвариантов” (Olver, 2001; Hann, Hickman, 2002; Musso, Nicolodi, 2009; Hoff, Olver, 2013).

Например, С. Карлсон (Carlsson, 1996) предложил метод сопоставления  $\circ$  по пяти точкам касания вписанного в  $\circ$  эллипса либо по четырем точкам касания к  $\circ$ , образующим гармоническое

отношение, которое можно доопределить для четырех точек на эллипсе. Однако в этих работах схемы и методы детекции проективно устойчивых свойств *симметрии* выпуклой гладкой кривой не рассматриваются.

Симметрии плоских фигур исследуются чаще всего применительно к кривым *заданного аналитического порядка*. Можно привести пример исследования аспектов симметрии алгебраических объектов *шестого* порядка (Itenberg, Itenberg, 2004) либо работу, описывающую свойства и особенности кривых *седьмого* порядка (Brugalle, 2007). Интересны работы по параметризации и нормализации кривых *ротационной* симметрии (Lebmeir, Jurgen, 2008). В цитированных работах представители семейства **o** не рассматриваются, а сам список дублирует таковой из работы (Николаев, 2022).

Сформулируем основные выводы по рассмотренной теме “*Привлечение ДП в задаче проективно инвариантного описания сцен вида “o + ext-P” в форме вурф-отображений*”.

1. Разработаны и испытаны в сериях модельных тестов численные методы решения задачи инвариантного описания **o** для двух версий ее реализации: (1) ext-P задается независимым образом, либо (2) его позиция является продуктом анализа *скрытых* свойств симметрии **o**.

2. Версия (1) успешно протестирована по единой схеме (радиальная W-функция и две тангенциальных) для **o** *общего* вида и имеющих *скрытые симметрии*.

3. Для анализа *скрытых* свойств симметрии предложены и успешно испытаны программы автоматического поиска ДП и их кластеризации для случаев ext-P и принадлежности HL.

4. Впервые исследованы кривые типа  $R_3$ , не имеющие дополнительной *осевой* симметрии, анализ (на HL) ДП которых показал наличие интересных проективных свойств узлов ДП.

5. Дополнительный анализ свойств W-функций **oo** *осевой* симметрии дал возможность (в задаче оценки W-отображений **oo**) включить обработку проекций этих **o** в *общую* схему.

6. Все рассмотренные варианты симметричных **o** не нарушили тезиса *уникального* ext-P.

Предложенные приемы обработки кривых семейства **o** с получением для них проективно инвариантных описаний (в виде вурф-отображений) оригинальны. Прямые и косвенные аналоги схем привлечения ДП (в варианте ext-P либо для ext-L) в задаче репрезентации **o** в классе проективной эквивалентности не обнаружены в доступных базах цитирования.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Акимова Г.П., Богданов Д.С., Куратов П.А. Задача проективно инвариантного описания овалов с неявно выраженной центральной и осевой симметрией и принцип двойственности Плюккера. *Труды ИСА РАН*. 2014. Т. 64. № 1. С. 75–83.
- Балицкий А.М., Савчик А.В., Гафаров Р.Ф., Коноваленко И.А. О проективно инвариантных точках овала с выделенной внешней прямой. *Проблемы передачи информации*. 2017. Т. 53. № 3. С. 84–89. <https://doi.org/10.1134/S0032946017030097>
- Глаголев Н.А. *Проективная геометрия*. М. Высш. шк., 1963. 344 с.
- Депутатов В.Н. К вопросу о природе плоскостных вурфов. *Математический сборник*. 1926. Т. 33. № 1. С. 109–118.
- Картан Э. *Метод подвижного репера, теория непрерывных групп и обобщенные пространства*. Сб. *Современная математика*. Кн. 2-я. М., Л.: Гос. технико-теор. изд-во, 1933. 72 с.
- Моденов П.С. *Аналитическая геометрия*. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1969. 699 с.
- Николаев П.П. Метод проективно инвариантного описания овалов с осевой либо центральной симметрией. *Информационные технологии и вычислительные системы*. 2014. № 2. С. 46–59.
- Николаев П.П. О задаче проективно инвариантного описания овалов с симметриями трех родов. *Вестник РФФИ*. 2016. Т. 92. № 4. С. 38–54. DOI: 10.22204/2410-4639-2016-092-04-38-54
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. II. Овал в композиции с дуальным элементом плоскости. *Сенсорные системы*. 2011. Т. 25. № 3. С. 245–266.
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. VIII. О вычислении ансамбля ротационной корреспонденции овалов с симметрией вращения. *Сенсорные системы*. 2015. Т. 29. № 1. С. 28–55.
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. X. Методы поиска октета инвариантных точек контура овала – итог включения развитой теории в схемы его описания. *Сенсорные системы*. 2017. Т. 31. № 3. С. 202–226.
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. XII. О новых методах проективно инвариантного описания овалов в композиции с линейным элементом плоскости. *Сенсорные системы*. 2019. Т. 33. № 1. С. 15–29. <https://doi.org/10.1134/S0235009219030077>
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. XV. Методы поиска осей и центров овалов с симметриями, использующие

- сет дуальных пар либо триады чевиан. *Сенсорные системы*. 2021. Т. 35. № 1. С. 55–78. <https://doi.org/10.31857/S0235009221010054>
- Николаев П.П. Распознавание проективно преобразованных плоских фигур. XVI. Октет проективно стабильных вершин овала и новые методы эталонного его описания, использующие октет. *Сенсорные системы*. 2022. Т. 36. № 1. С. 61–89. <https://doi.org/10.31857/S023500922201005X>
- Савелов А.А. *Плоские кривые. Систематика, свойства, применения*. М.: Гос. изд-во физико-матем. лит-ры, 1960. 293 с.
- Савчик А.В., Николаев П.П. Теорема о пересечении T-и H-поляра. *Информационные процессы*. 2016. Т. 16. № 4. С. 430–443.
- Brugalle E. Symmetric plane curves of degree 7: Pseudoholomorphic and algebraic classifications. *Journal fur Die Reine und Angewandte Mathematic (Crelles Journal)*. 2007. V. 612. P. 1–38. <https://doi.org/10.1515/CRELLE.2007.086>
- Carlsson S. Projectively invariant decomposition and recognition of planar shapes. *International Journal of Computer Vision*. 1996. V. 17(2). P. 193–209. <https://doi.org/10.1007/BF00058751>
- Faugeras O. Cartan’s moving frame method and its application to the geometry and evolution of curves in the euclidean, affine and projective planes. *Joint European-US Workshop on Applications of Invariance in Computer Vision*. Berlin, Heidelberg. Springer, 1993. P. 9–46. [https://doi.org/10.1007/3-540-58240-1\\_2](https://doi.org/10.1007/3-540-58240-1_2)
- Gardner M. *Piet Hein’s Superellipse, Mathematical Carnival. A New Round-Up of Tantalizers and Puzzles from Scientific American*. New York. Vintage Press, 1977. 240–254 p.
- Hann C.E., Hickman M.S. Projective curvature and integral invariants. *Acta Applicandae Mathematica*. 2002. V. 74(2). P. 177–193. <https://doi.org/10.1023/A:1020617228313>
- Hoff D., Olver P.J. Extensions of invariant signatures for object recognition. *Journal of mathematical imaging and vision*. 2013. V. 45. P. 176–185. <https://doi.org/10.1007/s10851-012-0358-7>
- Itenberg I.V., Itenberg V.S. Symmetric sextics in the real projective plane and auxiliary conics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2004. V. 119(1). P. 78–85. <https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000008743.36321.72>
- Lebmeir P., Jurgen R.-G. Rotations, translations and symmetry detection for complexified curves. *Computer Aided Geometric Design*. 2008. V. 25. P. 707–719. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2008.09.004>
- Musso E., Nicolodi L. Invariant signature of closed planar curves. *Journal of mathematical imaging and vision*. 2009. V. 35(1). P. 68–85. <https://doi.org/10.1007/s10851-009-0155-0>
- Olver P.J. Geometric foundations of numerical algorithms and symmetry. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. 2001. V. 11. P. 417–436. <https://doi.org/10.1007/s002000000053>
- Sanchez-Reyes J. Detecting symmetries in polynomial Bezier curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2015. V. 288. P. 274–283. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.04.025>

## Recognition of projectively transformed planar figures. XVII. Using plucker’s reciprocity theorem to describe ovals with an external fixed point

P.P. Nikolaev<sup>1, 2</sup>

<sup>1</sup> *Institute for Information Transmission Problems “Kharkevich Institute” RAS,  
127994 Moscow, Bolshoy Karetny per., 19*

<sup>2</sup> *Smart Engines Service LLC,  
117312, Moscow, Prospect 60-Letiya Oktyabrya, 9, Russia*

*E-mail: nikol@iitp.ru*

An approach to a projectively invariant description of a family of ovals ( $\mathbf{o}$ ) in scenes where the figure  $\mathbf{o}$  is given in a composition with an external point, P, fixed in its plane is considered, and in cases where  $\mathbf{o}$  has hidden symmetries (central or axial), the position of P is not specified in the form of an additional condition defining the scene, but can be calculated through the symmetry parameters. The invariant description, as a general universal method for numerical processing of compositions like “ $\mathbf{o} + \text{ext-P}$ ”, is proposed to be implemented in the form of Wurf mappings. The method uses the apparatus of dual pairs (DP) and wurf functions, previously developed and described by us, which are a product of decomposition of statements of the reciprocity theorem proposed by J. Plücker to describe the properties of quadratic curves (conics). Illustrated examples of special cases of the “ $\mathbf{o} + \text{ext-P}$ ” composition are considered and discussed, actually completing the topic of studying the scenes like “an oval and a linear element of the plane”, which are classified according to the types of symmetry of  $\mathbf{o}$ .

*Keywords:* oval, center and axis of symmetry, Plücker pole and polar curve, dual pair, harmonic wurf, planar wurf, wurf function, descriptor, Lamé curve

## REFERENCES

- Akimova G.P., Bogdanov D.S., Kuratov P.A. Zadacha proektivno invariantnogo opisaniya ovalov s nejavno vyrazhennoj central'noj i osevoj simmetrijej i princip dvojstvennosti Pljukker [Task projectively the invariant description of ovals with implicitly expressed central and axial symmetry and the principle of a duality of Plucker]. *Trudy ISA RAN* [Proceedings of the ISA RAS]. 2014. V. 64(1). P. 75–83. (in Russian).
- Balitsky A.M., Savchik A.V., Gafarov R.F., Konovalenko I.A. O proektivno invariantnykh tochkah ovala s vydelennoj vneshnej pryamoj. [On projective invariant points of oval coupled with external line]. *Problemy peredachi informacii* [Problems of Information Transmission]. 2017. V. 53(3). P. 84–89. (in Russian). <https://doi.org/10.1134/S0032946017030097>
- Glagolev N.A. *Proektivnaya geometriya* [Projective geometry]. Moscow, Vysshaya shkola [High school]. 1963. 344 p. (in Russian).
- Deputatov V.N. K voprosu o prirode ploskostnykh vurfov [On the nature of the plane wurfs]. *Matematicheskij sbornik* [Mathematical collection]. 1926. V. 33(1). P. 109–118. (in Russian).
- Kartan Je. *Metod podvizhnogo repera, teoriya nepreryvnykh grupp i obobshchennye prostranstva. Sb. Sovremennaya matematika. Kniga 2-ya* [The method of a moving ranging mark, the theory of continuous groups and generalized spaces]. Moscow, Leningrad, Gosudarstvennoe tehniko-teoreticheskoe izdatel'stvo [State technical and theoretical publishing]. 1933. 72 p. (in Russian).
- Modenov P.S. *Analiticheskaya geometriya* [Analytic geometry]. Moscow, Izdatel'stvo moskovskogo universiteta [Moscow University Press]. 1969. 699 p. (in Russian).
- Nikolaev P.P. Metod proektivno invariantnogo opisaniya ovalov s osevoi libo tsentral'noi simmetrijej [A method for projectively-invariant description of ovals having axial or central symmetry]. *Informatsionnye tekhnologii i vychislitel'nye sistemy*. 2014. No. 2. P. 46–59. (in Russian).
- Nikolaev P.P. O zadache proektivno invariantnogo opisaniya ovalov s simmetriyami trekh rodov [A projective invariant description of ovals with three possible symmetry genera]. *Vestnik RFFI* [RFBR Information Bulletin]. 2016. V. 92(4). P. 38–54. DOI: 10.22204/2410-4639-2016-092-04-38-54 (in Russian).
- Nikolayev P.P. Raspoznavanie proektivno preobrazovannykh ploskikh figur. II. Oval v kompozitsii s dual'nym ehlementom ploskosti. [Recognition of projectively transformed planar figures. II. An oval in a composition with a dual element of a plane]. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2011. V. 25(3). P. 245–266. (in Russian).
- Nikolayev P.P. Raspoznavanie proektivno preobrazovannykh ploskikh figur. VIII. O vychislenii ansamblya rotacionnoj korrespondencii ovalov s simmetrijej vrashheniya [Recognition of projectively transformed planar figures. VIII. On computation of the ensemble of correspondence for “rotationally symmetric” ovals]. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2015. V. 29(1). P. 28–55. (in Russian).
- Nikolayev P.P. Raspoznavanie proektivno preobrazovannykh ploskikh figur. X. Metody poiska okteta invariantnykh tochek kontura ovala – itog vklucheniya razvitoi teorii v skhemy ego opisaniya [Recognition of projectively transformed planar figures. X. Methods for finding an octet of invariant points of an oval contour – the result of introducing a developed theory into the schemes of oval description]. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2017. V. 31(3). P. 202–226. (in Russian).
- Nikolaev P.P. Raspoznavanie proektivno preobrazovannykh ploskikh figur. XII. O novykh metodakh proektivno invariantnogo opisaniya ovalov v kompozitsii s lineinym elementom ploskosti [Recognition of projectively transformed planar figures. XII. On new methods for projectively-invariant description of ovals in composition with a linear element of a plane]. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2019. V. 33(1). P. 15–29. (in Russian). <https://doi.org/10.1134/S0235009219030077>
- Nikolaev P.P. Raspoznavanie proektivno preobrazovannykh ploskikh figur. XV. Metody poiska osey i centrov ovalov s simmetriyami, ispol'zujushhie set dual'nykh par libo triady chevian [Recognition of projectively transformed planar figures. XV. Methods for searching for axes and centers of ovals with symmetries, using a set of dual pairs of cevian triads]. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2021. V. 35(1). P. 55–78. (in Russian). <https://doi.org/10.31857/S0235009221010054>
- Nikolayev P.P. Raspoznavanie proektivno preobrazovannykh ploskikh figur. XVI. Oktet proektivno stabil'nykh vershin ovala i novye metody etalonnogo ego opisaniya, ispol'zuyushchie oktet. [Recognition of projectively transformed planar figures. XVI. The octet of projectively stable vertices of the oval and new methods for its reference description using the octet]. *Sensornye sistemy* [Sensory systems]. 2022. V. 36(1). P. 61–89. (in Russian). <https://doi.org/10.31857/S023500922201005X>
- Savelov A.A. *Ploskie krivye. Sistematika, svoystva, primeneniya* [Flat curves. Systematics, properties, applications]. M. Gos. izd-vo fiziko-matematicheskoy literatury [Moscow. State publishing house of physical and mathematical literature], 1960. 293 p. (in Russian).
- Savchik A.V., Nikolaev P.P. Teorema o peresechenii T- i H-polyar [The Theorem of T- and H-Polars Intersections Count]. *Informacionnye process* [Information processes]. 2016. V. 16(4). P. 430–443 (in Russian).
- Brugalle E. Symmetric plane curves of degree 7: Pseudoholomorphic and algebraic classifications. *Journal fur Die Reine und Angewandte Mathematic (Crelles Journal)*. 2007. V. 612. P. 1–38. <https://doi.org/10.1515/CRELLE.2007.086>
- Carlsson S. Projectively invariant decomposition and recognition of planar shapes. *International Journal*

- of *Computer Vision*. 1996. V. 17(2). P. 193–209. <https://doi.org/10.1007/BF00058751>
- Faugeras O. Cartan's moving frame method and its application to the geometry and evolution of curves in the euclidean, affine and projective planes. *Joint European-US Workshop on Applications of Invariance in Computer Vision*. Berlin, Heidelberg. Springer, 1993. P. 9–46. [https://doi.org/10.1007/3-540-58240-1\\_2](https://doi.org/10.1007/3-540-58240-1_2)
- Gardner M. *Piet Hein's Superellipse, Mathematical Carnival. A New Round-Up of Tantalizers and Puzzles from Scientific American*. New York. Vintage Press, 1977. 240–254 p.
- Hann C.E., Hickman M.S. Projective curvature and integral invariants. *Acta Applicandae Mathematica*. 2002. V. 74(2). P. 177–193. <https://doi.org/10.1023/A:1020617228313>
- Hoff D., Olver P.J. Extensions of invariant signatures for object recognition. *Journal of mathematical imaging and vision*. 2013. V. 45. P. 176–185. <https://doi.org/10.1007/s10851-012-0358-7>
- Itenberg I.V., Itenberg V.S. Symmetric sextics in the real projective plane and auxiliary conics. *Journal of Mathematical Sciences*. 2004. V. 119(1). P. 78–85. <https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000008743.36321.72>
- Lebmeir P., Jurgen R.-G. Rotations, translations and symmetry detection for complexified curves. *Computer Aided Geometric Design*. 2008. V. 25. P. 707–719. <https://doi.org/10.1016/j.cagd.2008.09.004>
- Musso E., Nicolodi L. Invariant signature of closed planar curves. *Journal of mathematical imaging and vision*. 2009. V. 35(1). P. 68–85. <https://doi.org/10.1007/s10851-009-0155-0>
- Olver P.J. Geometric foundations of numerical algorithms and symmetry. *Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing*. 2001. V. 11. P. 417–436. <https://doi.org/10.1007/s0020000000053>
- Sanchez-Reyes J. Detecting symmetries in polynomial Bezier curves. *Journal of Computational and Applied Mathematics*. 2015. V. 288. P. 274–283. <https://doi.org/10.1016/j.cam.2015.04.025>